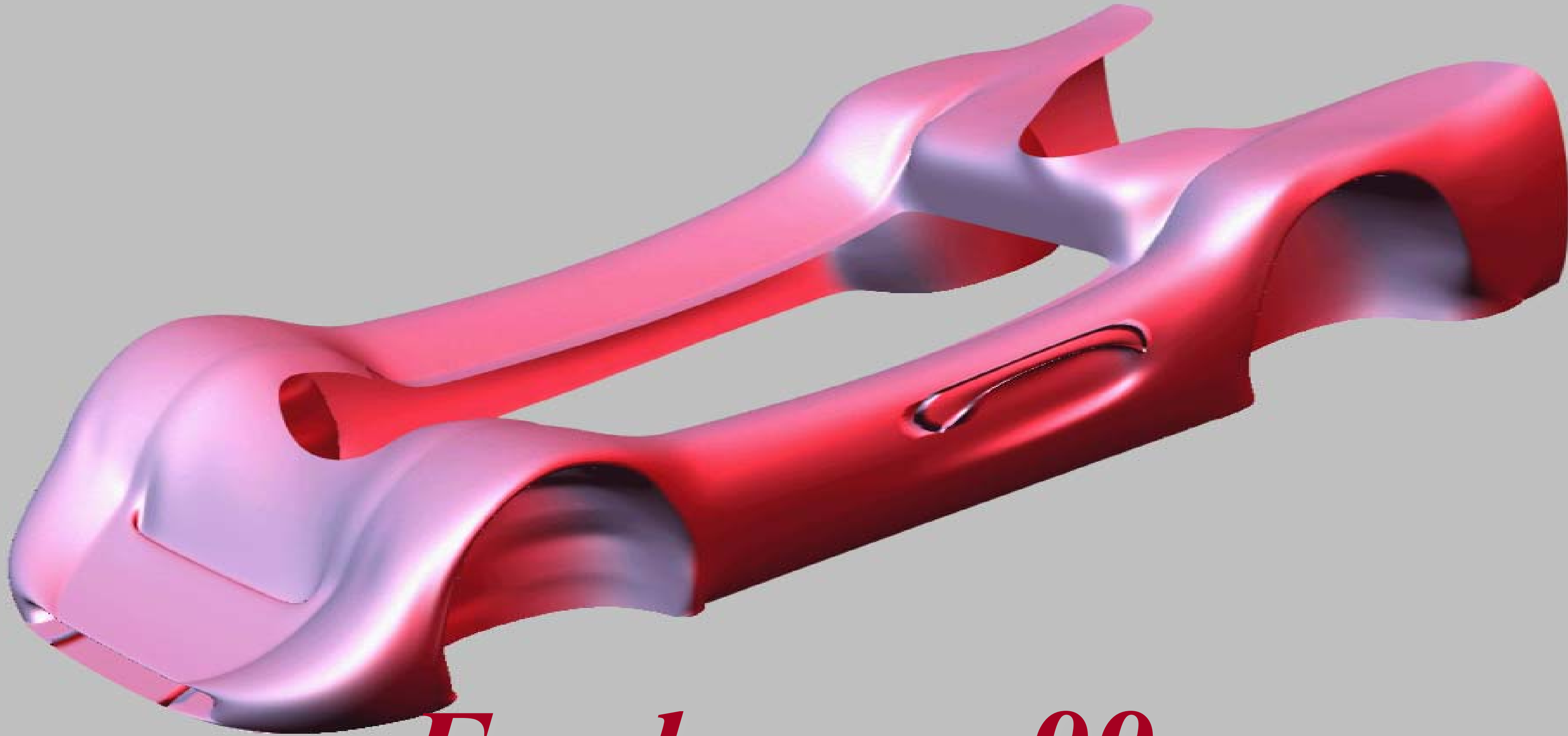
Локальные и итерационные Subdivision-алгоритмы

Фёдор А.Плетенёв, РФЯЦ (ВНИИЭФ)

Джэймс Т.Хёрли, корпорация ИНТЕЛ



Графикон-99

International Conference Graphicon 1999,
Moscow, Russia, http://www.graphicon.ru/

Subdivision - гладкое восполнение поверхностных элементов

- Традиционно представление геометрических данных в компьютерной графике осуществляется через наборы плоских многоугольников. Сложности графических сцен и ограничения по памяти навязывают достаточно жесткие ограничения по мелкости этих многоугольников в различных генераторах геометрий и графических сцен. Тем не менее многие графические приложения работают с разными масштабами граф.сцен вплоть до размеров описывающих их многоугольников. Поэтому, гладкое (адаптивное) восполнение (Subdivision) геометрических форм является необходимым графическим инструментом во многих современных пакетах.
- Надо отметить, что наука о гладком восполнении (Subdivision) многоугольных сеток развита достаточно широко, изначально в основном благодаря CAD-интересам.
- Что касается компьютерной графики, то уже около двадцати лет Subdivision неотъемлемая её часть
- Среди основных подходов Subdivision надо выделить три направления : Локальные (параметрические), Итерационные и Вариационные.

Итерационные алгоритмы Subdivision

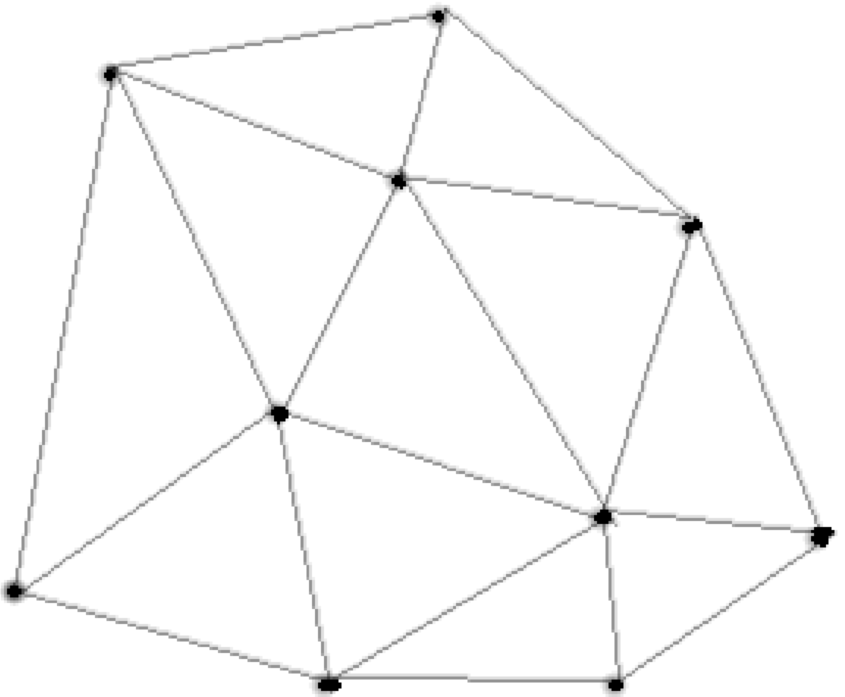
- **Базовыми итерационными схемами Subdivision считаются**
  – алгоритм Дуо-Сабина (Doo-Sabin), работающий на произвольных сетках (meshes) произвольной топологии, порождающий локально би-квадратическую B-сплайн поверхность (исключая конечное число контрольных точек)
  – алгоритм Кэтмулла-Кларка (Catmull-Clark), работающий также на произвольных сетках (meshes) произвольной топологии, генерирующий на каждом шаге сетку из четырехугольников, порождающий локально би-кубичную однородную B-сплайн поверхность (исключая конечное число контрольных точек)
  – алгоритм Лупа-Хоппе (Loop-Hoppe), работающий на сетках (meshes) из треугольников произвольной топологии, порождающий локально квадратическую однородную box-сплайн поверхность

Подход Дуо-Сабина

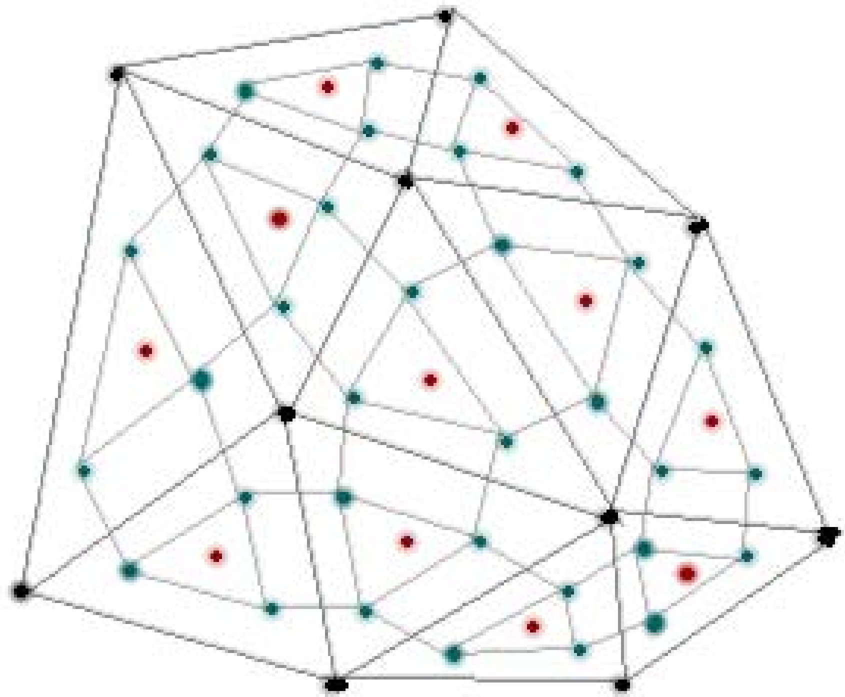
Центры ячеек (как среднее вершин) усредняются с самими вершинами. Эти усреднения и будут вершинами в новой сетке.

Многоугольники формируются трех типов

1) многоугольники подобные исходным сосредоточенные в центрах исходных многоугольников
2) четырехугольники связанные с ребрами исходной сетки
3) многоугольники связанные с вершинами исходной сетки



начальная геометрия



первое разбиение

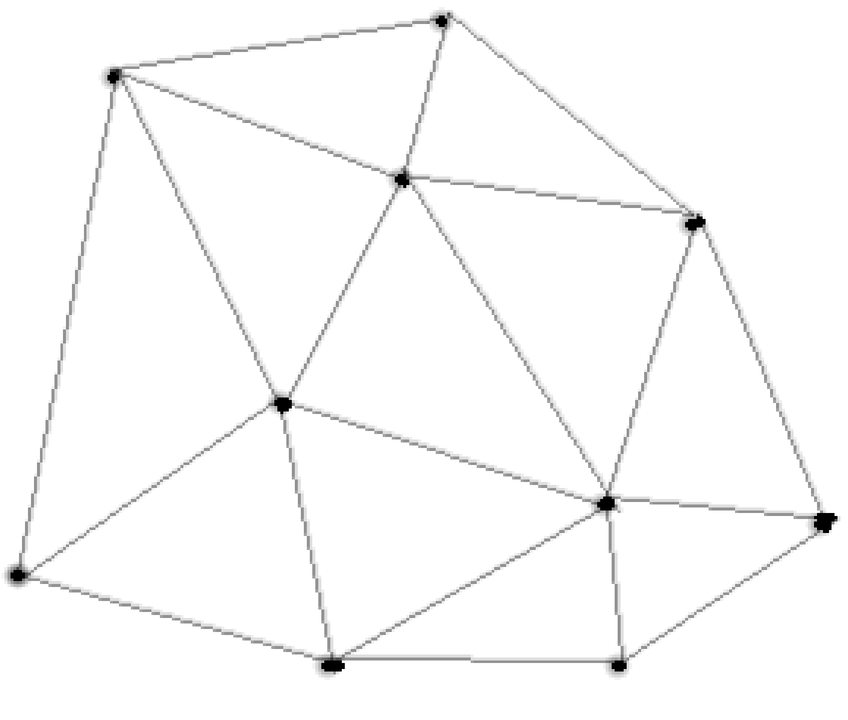
Подход Кэтмула-Кларка

Центры ячеек (как среднее вершин) , реберные вершины и возмущенные вершины старой сетки будут вершинами в новой сетке.

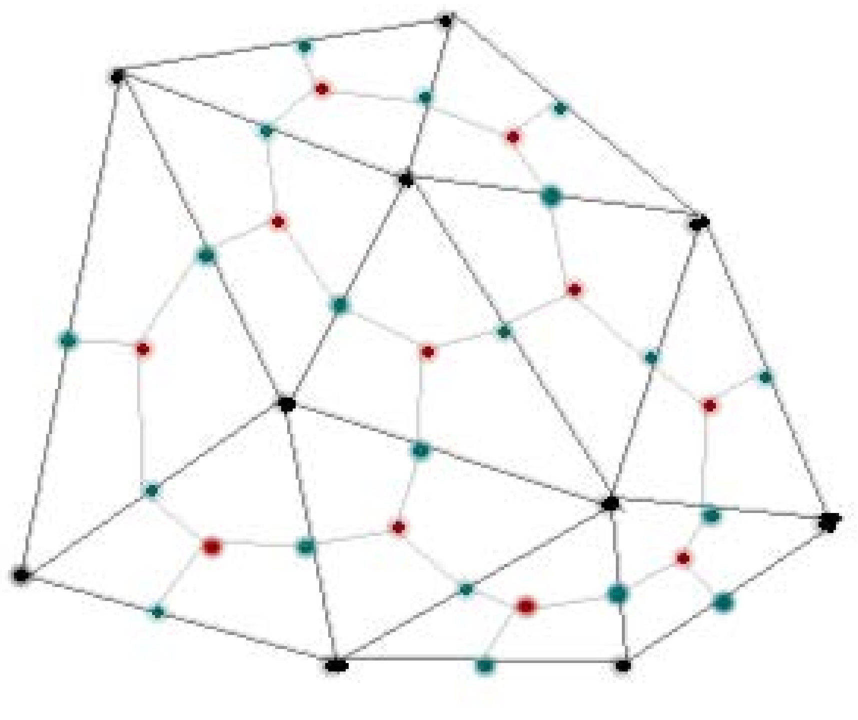
Реберные вершины получаются усреднением центров ячеек и старых вершин, прилегающих к ребру

Вершины старой сетки возмущаются путем их усреднения с центрами ячеек и реберных вершин, прилегающих к данной вершине.

Многоугольники (всегда четырехугольники) формируются из одной старой вершины, центра ячейки двух середины ребер.



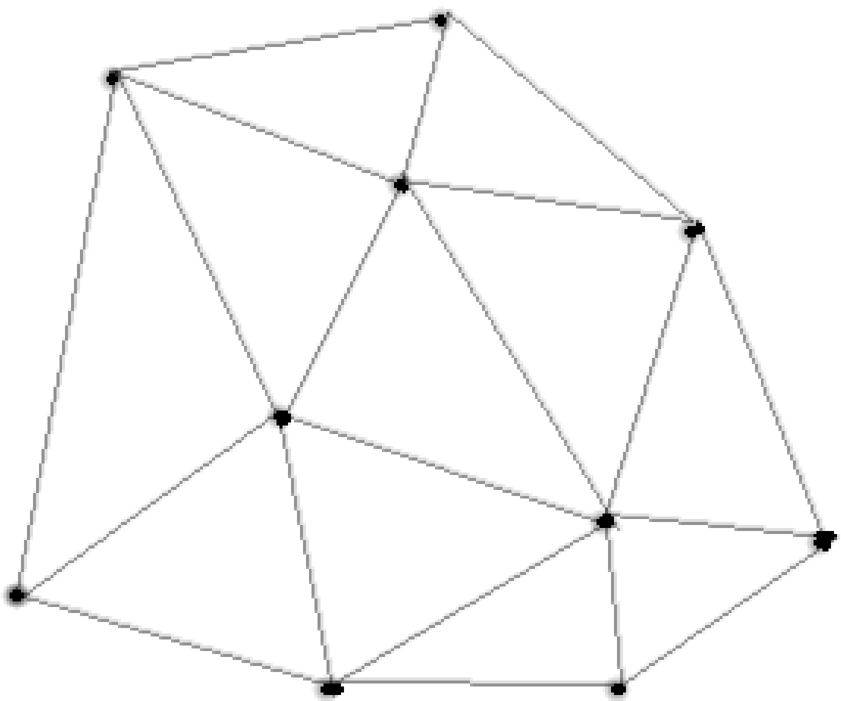
начальная геометрия



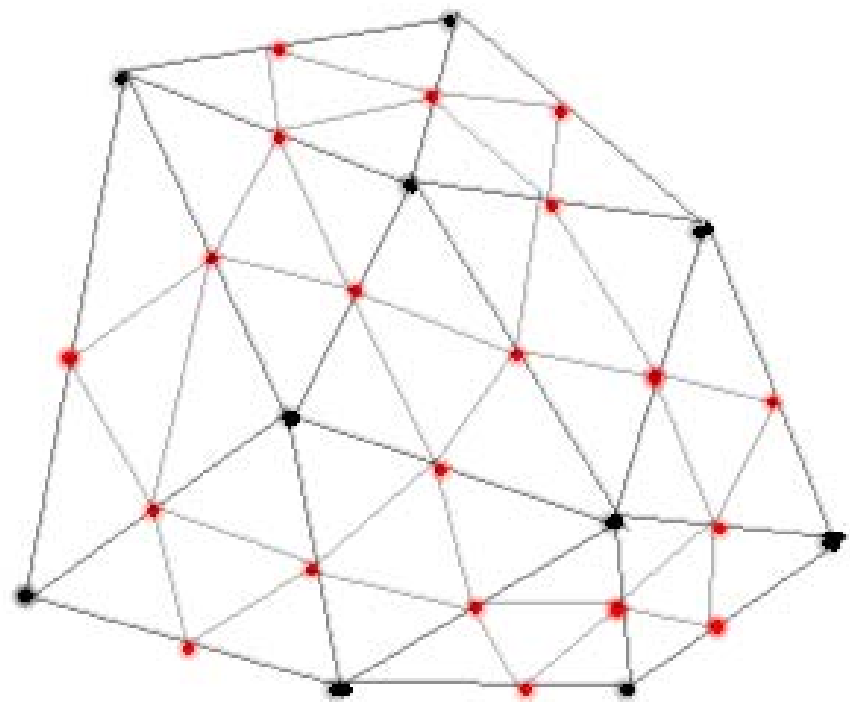
первое разбиение

Подход Лупа-Хоппе

Реберные вершины и возмущенные вершины старой сетки будут вершинами в новой сетке.
Реберные вершины получаются усреднением всех вершин треугольников, прилегающих к ребру
Вершины старой сетки возмущаются путем их усреднения с вершинами треугольников, прилегающих к данной вершине.
Треугольники (по 4 в одном старом) формируются из возмущенных и реберных вершин.



начальная геометрия



первое разбиение

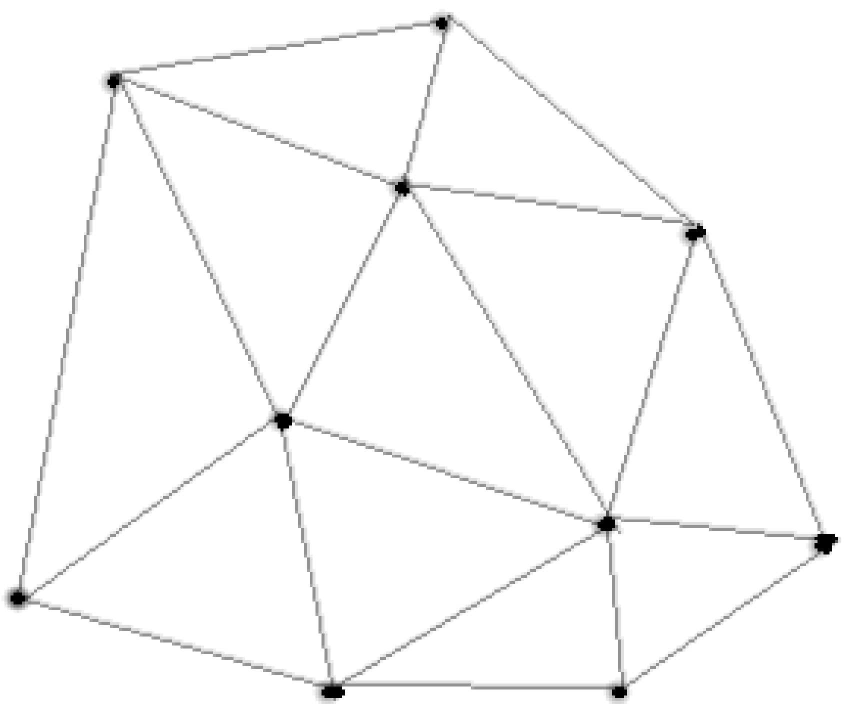
Наш подход

Центры ячеек (как среднее вершин) , реберные вершины и возмущенные вершины старой сетки будут вершинами в новой сетке.

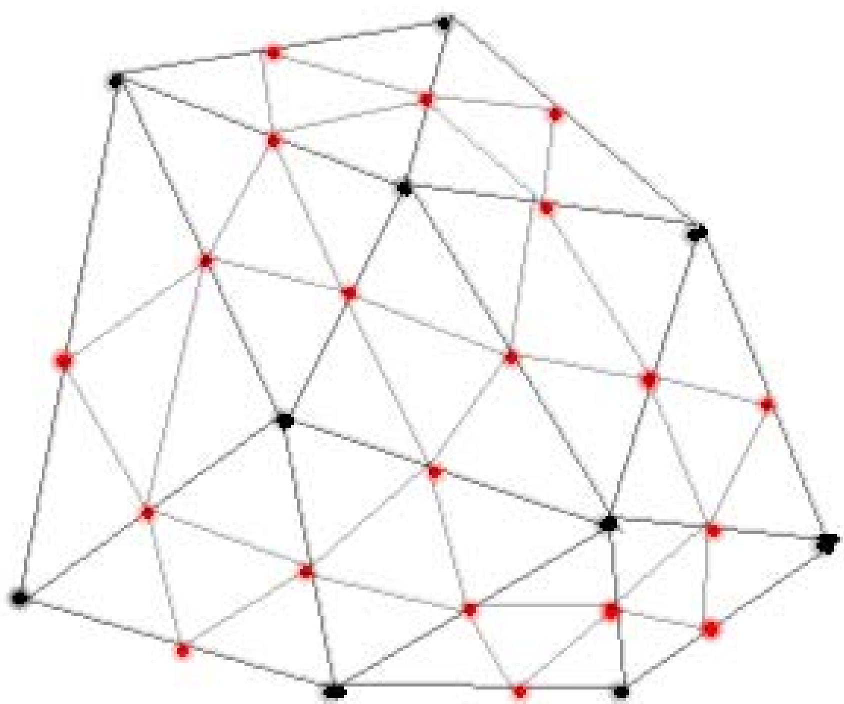
Реберные вершины получаются усреднением центров ячеек и старых вершин, прилегающих к ребру

Вершины старой сетки возмущаются путем их усреднения с центрами ячеек и реберных вершин, прилегающих к данной вершине.

Треугольники (по 4 в одном старом) формируются из возмущенных и реберных вершин.



начальная геометрия

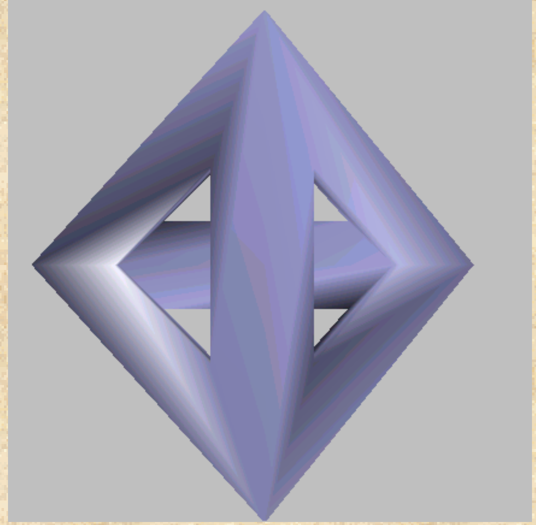


первое разбиение

Iterative Subdivision schemes

Subdivision quality

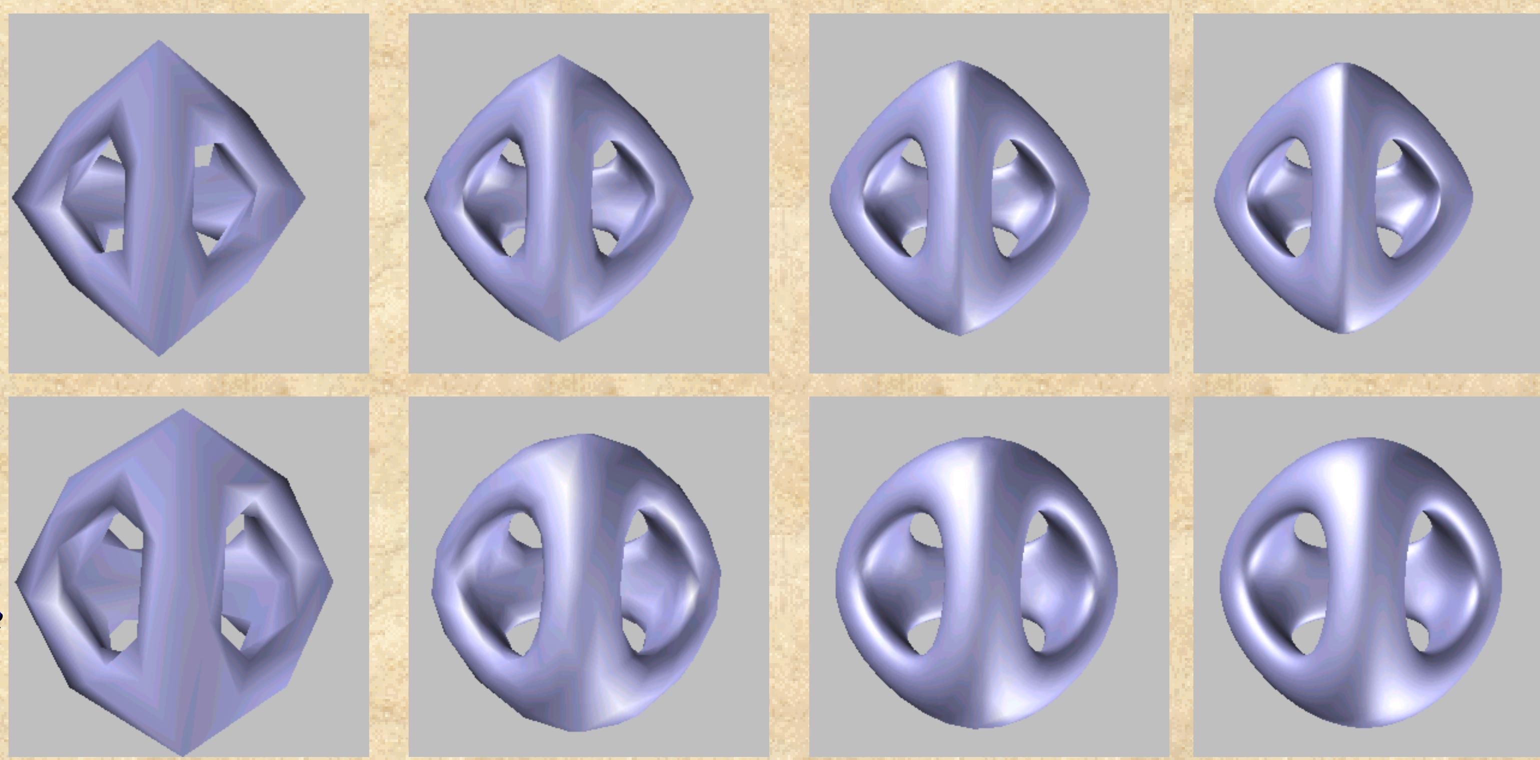
Original Geometry Not-subdivided



1-iteration *2-iterations* *3-iterations* *4-iterations*

Our Subdivision rule

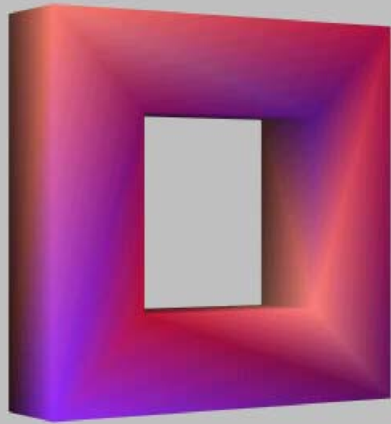
Loop-Hope Subdivision rule



Iterative Subdivision schemes

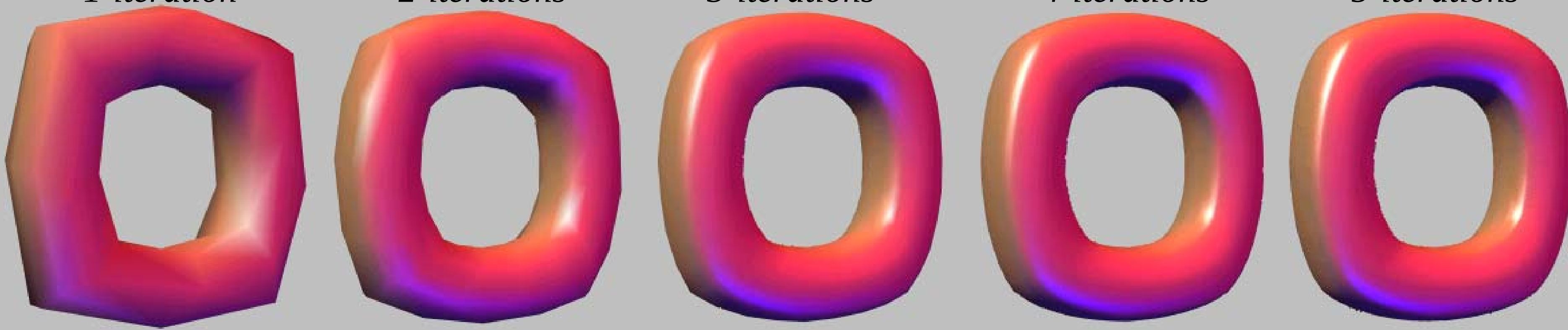
Subdivision quality

Original Geometry
Not-subdivided



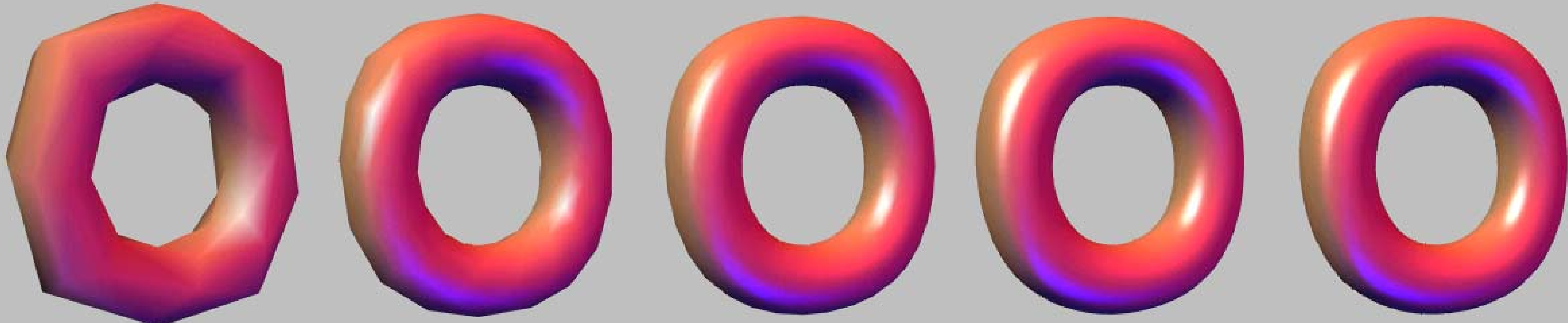
Our subdivision rule

1-iteration | *2-iterations* | *3-iterations* | *4-iterations* | *5-iterations*



Loop-Hope subdivision rule

1-iteration | *2-iterations* | *3-iterations* | *4-iterations* | *5-iterations*



Iterative Subdivision schemes

Subdivision quality

Original Geometry
Not-subdivided

Our Subdivision rule

Loop-Hope
Subdivision rule

Iterative Subdivision schemes

Subdivision quality

Original Geometry
Not-subdivided

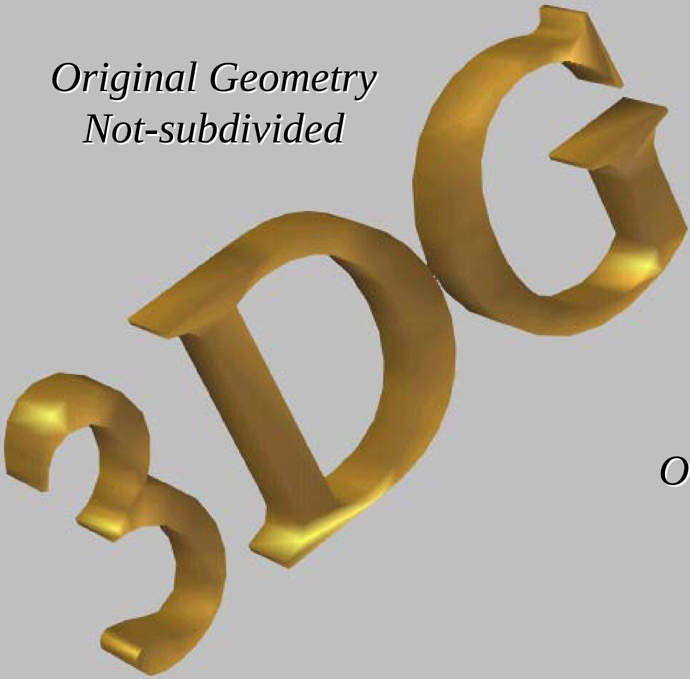
Our Subdivision rule

Loop-Hope
Subdivision rule

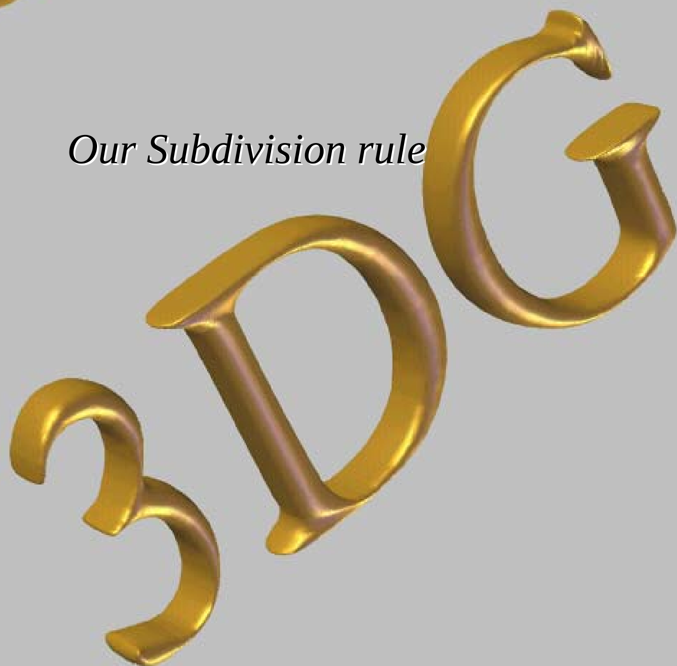
Iterative Subdivision schemes

Subdivision quality

Original Geometry
Not-subdivided



Our Subdivision rule



Loop-Hope
Subdivision rule

Iterative Subdivision schemes

Subdivision quality

Original Geometry
Not-subdivided

Our Subdivision rule

Loop-Hope
Subdivision rule

Локальные методы Subdivision

- Локальные (параметрические) методы предлагаемые нами заключаются в том, что мы используя информацию только об одном многоугольнике (треугольник или четырехугольник) как то координаты вершин многоугольника и вектора нормалей отнесенных к вершинам (а также в некоторых случаях и вектора нормалей отнесенных к ребрам), строим квадратические, би-квадратические, кубические и би-кубические поверхности.
- Эти поверхности стыкуются с поверхностями, построенными на соседних многоугольниках по нормалям в вершинах исходной сетки.
- Что касается стыковки по нормалям соседних поверхностей вдоль ребер исходной сетки, то ее можно добиться путем усреднения (Blending) соседних интерполяций с использованием барицентрических координат.

Кубическая параметризация кривой

Пусть нам дан в пространстве отрезок с вершинами A и B с координатами: $\vec{P}_A(x_A, y_A, z_A)$ и $\vec{P}_B(x_B, y_B, z_B)$. И пусть $\vec{n}_A$ и $\vec{n}_B$ вектора нормалей, заданные в этих вершинах A и B. Построим в пространстве кубическую кривую параметрического вида:

$$\vec{P}(u) = \vec{a} \cdot u^3 + \vec{b} \cdot u^2 + \vec{c} \cdot u + \vec{d} \qquad (1)$$

проходящую через вершины A и B. Что означает :

$$\left.\begin{aligned} \vec{P}(0) &= \vec{d} = \vec{P}_A \\ \vec{P}(1) &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{P}_B \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Также предположим, что касательные искомой кривой в вершинах A и B перпендикулярны векторам $\vec{n}_A$ и $\vec{n}_B$. Обозначим проекции вектора $\vec{P}_{AB} = \vec{P}_B - \vec{P}_A$ на плоскости перпендикулярные векторам $\vec{n}_A$ и $\vec{n}_B$, как $\vec{R}_{AB}$ и $\vec{R}_{BA}$. Усилим наше предположение, а именно

$$\left.\begin{aligned} \vec{P}'(0) &= \vec{R}_{AB} \\ \vec{P}'(1) &= \vec{R}_{BA} \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

Так как $$\vec{P}'(u) = 3\cdot\vec{a}\cdot u^2 + 2\cdot\vec{b}\cdot u + \vec{c}$$

то $$\vec{P}'(0) = \vec{c} = \vec{R}_{AB}\,, \quad \vec{P}'(1) = 3\cdot\vec{a} + 2\cdot\vec{b} + \vec{c} = \vec{R}_{BA}$$

или

$$\left.\begin{aligned} \vec{c} &= \vec{R}_{AB} \\ 3\cdot\vec{a} + 2\cdot\vec{b} + \vec{c} &= \vec{R}_{BA} \end{aligned}\right\} \qquad (2'')$$

Из системы (2)-(2’’) мы имеем

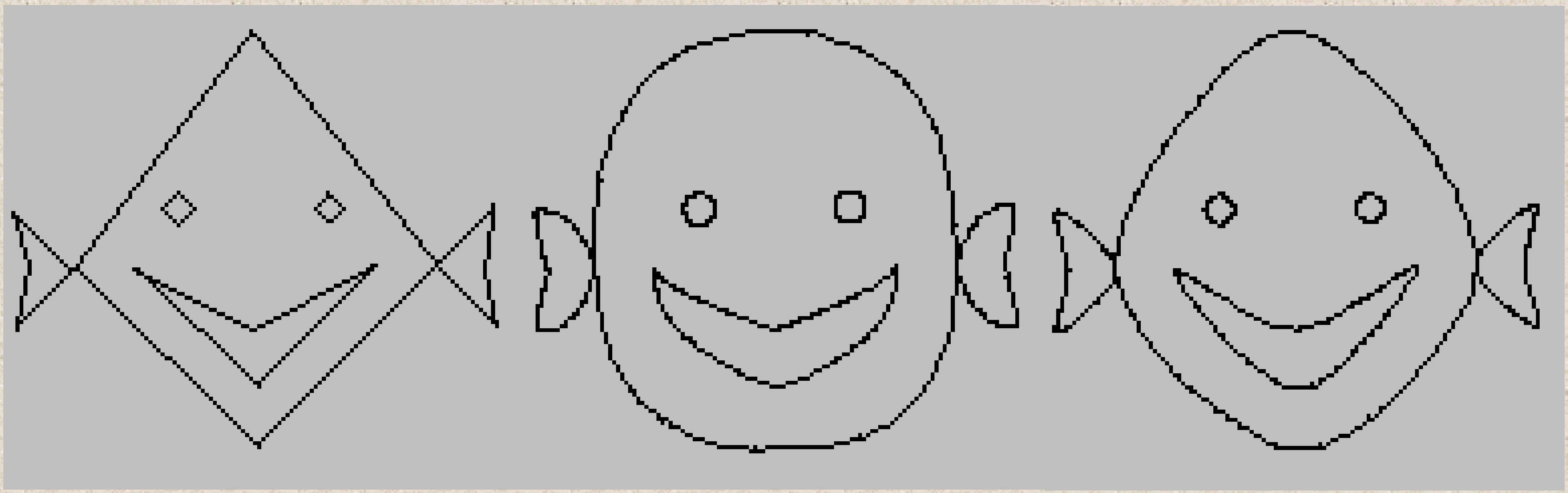
$$\left.\begin{aligned} \vec{a} &= \vec{R}_{AB} + \vec{R}_{BA} - 2\cdot\vec{P}_{AB} \\ \vec{b} &= 3\cdot\vec{P}_{AB} - 2\cdot\vec{R}_{AB} - \vec{R}_{BA} \\ \vec{c} &= \vec{R}_{AB} \\ \vec{d} &= \vec{P}_{A} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Локальные методы Subdivision

Начальная геометрия

Квадратичная интерполяция

Кубическая интерполяция



Квадратичная и Кубическая параметризации поверхности

Рассмотрим треугольник ABC.

Для построения квадратичного интерполяции

$$\vec{P}(u,v) = \vec{a} \cdot u^2 + \vec{b} \cdot v^2 + \vec{c} \cdot u \cdot v + \vec{d} \cdot u + \vec{e} \cdot v + \vec{f}$$

нам достаточно иметь три квадратичные кривые вдоль ребер AB, BC, CA

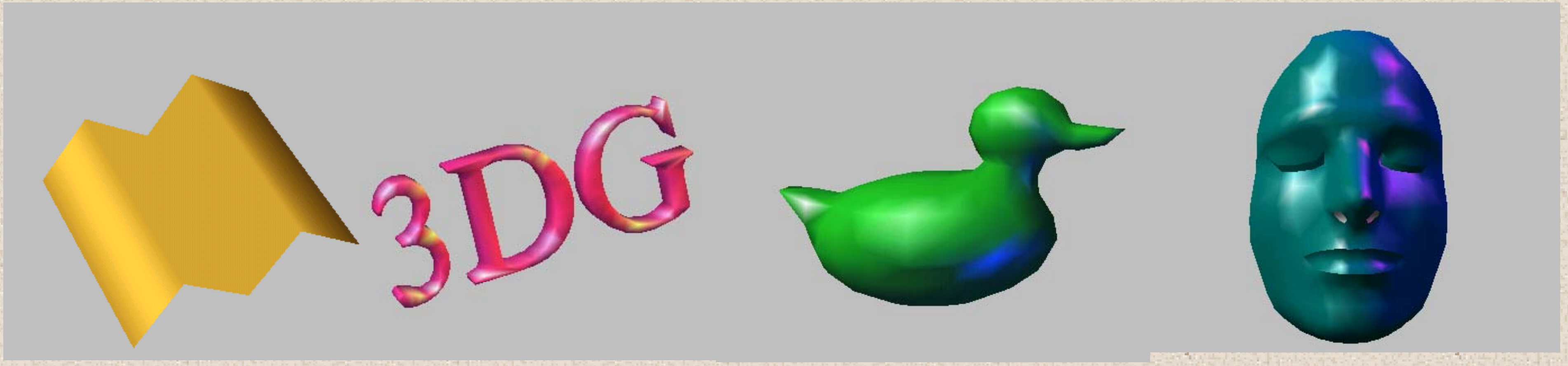
Для построения следующей кубичной интерполяции

$$\vec{P}(u,v) = \vec{a} \cdot u^3 + \vec{b} \cdot v^3 + \vec{c} \cdot u^2 \cdot v + \vec{d} \cdot u \cdot v^2 + \vec{e} \cdot u^2 + \vec{f} \cdot v^2 + \vec{h} \cdot u + \vec{s} \cdot v + \vec{t}$$

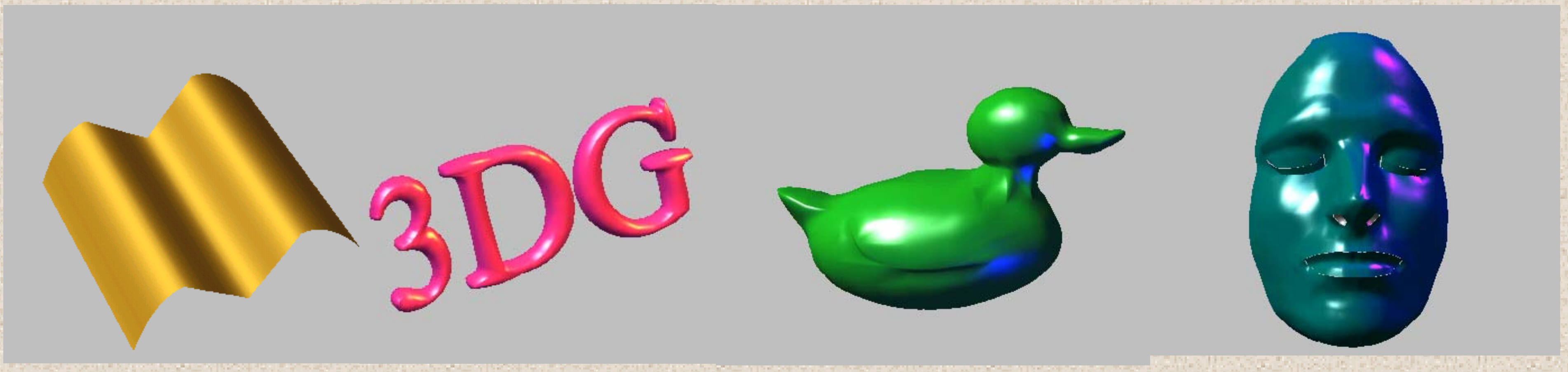
нам достаточно иметь три кубичные кривые вдоль ребер AB, BC, CA

Квадратичная интерполяция

Начальная геометрия

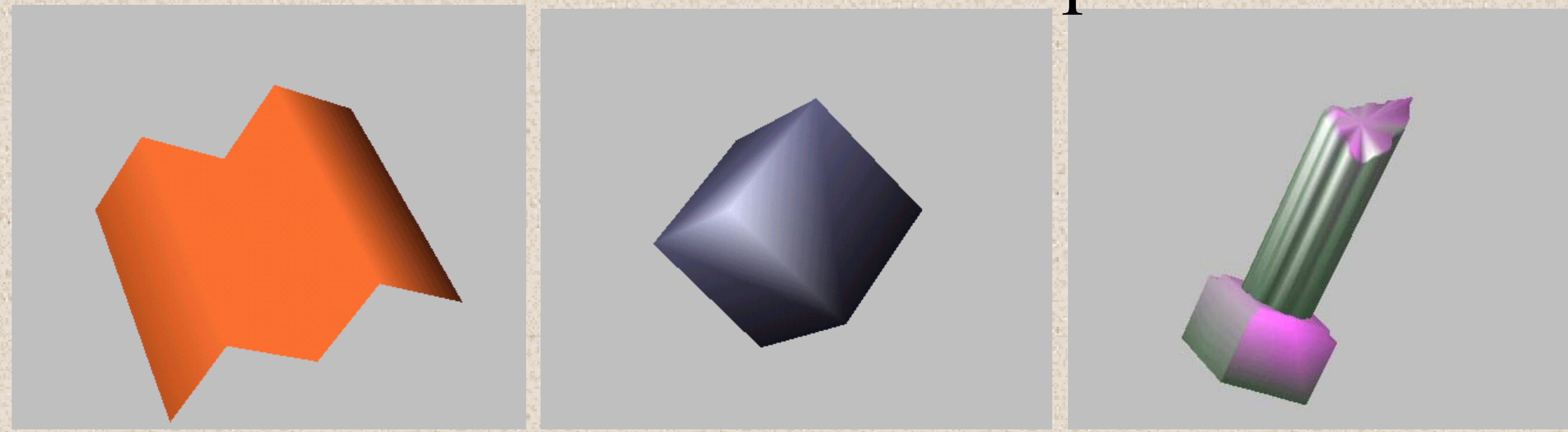


Гладко восполненная геометрия

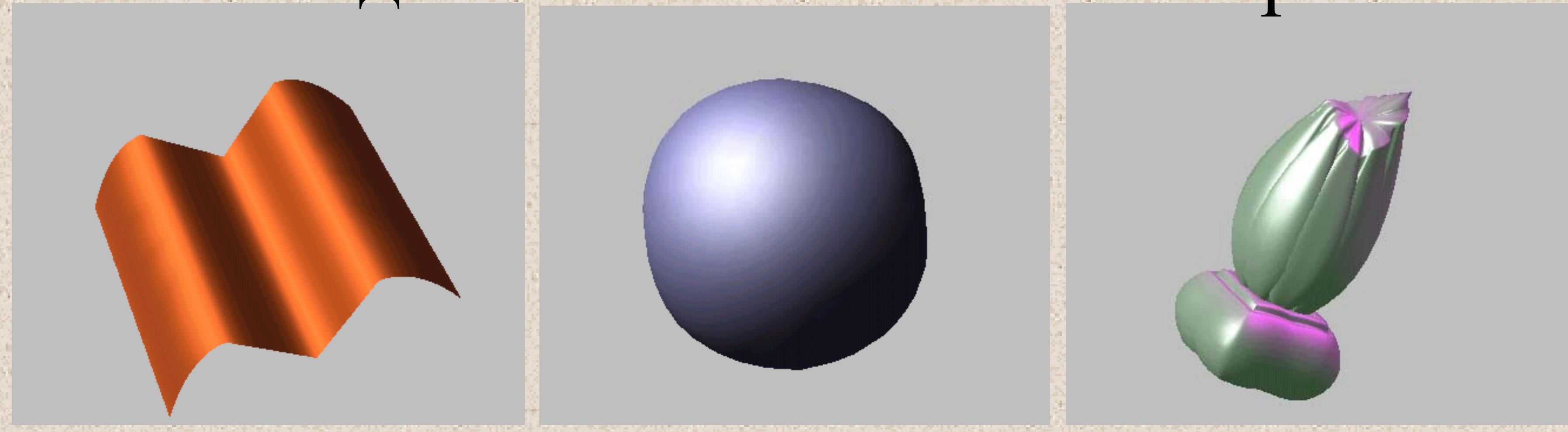


Би-Квадратичная интерполяция

Начальная геометрия

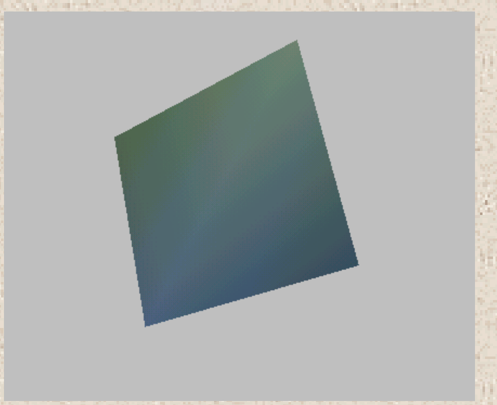
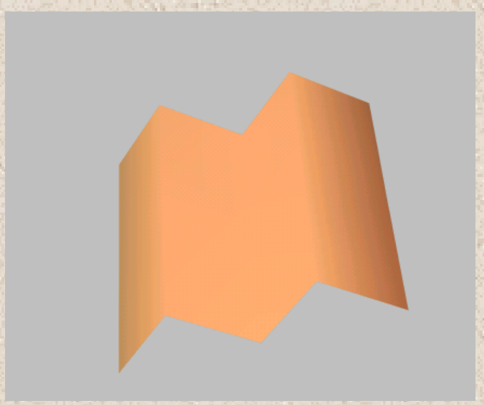
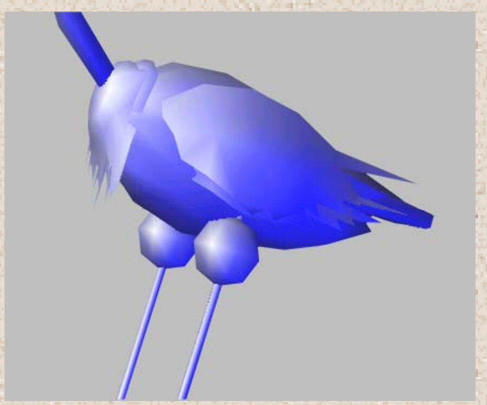


Гладко восполненная геометрия

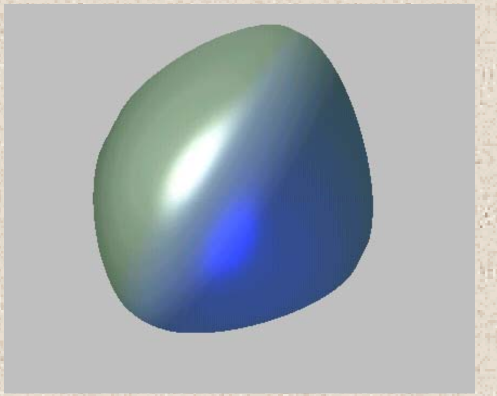
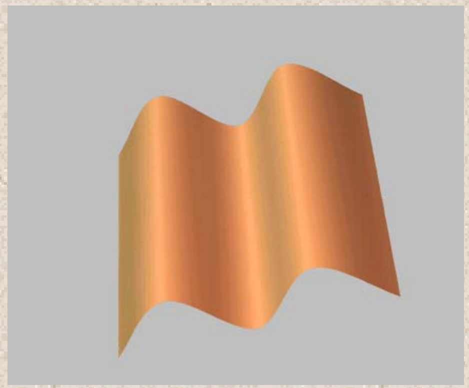
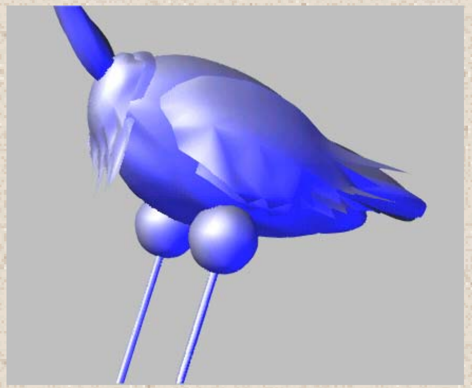


Кубическая интерполяция

Начальная геометрия

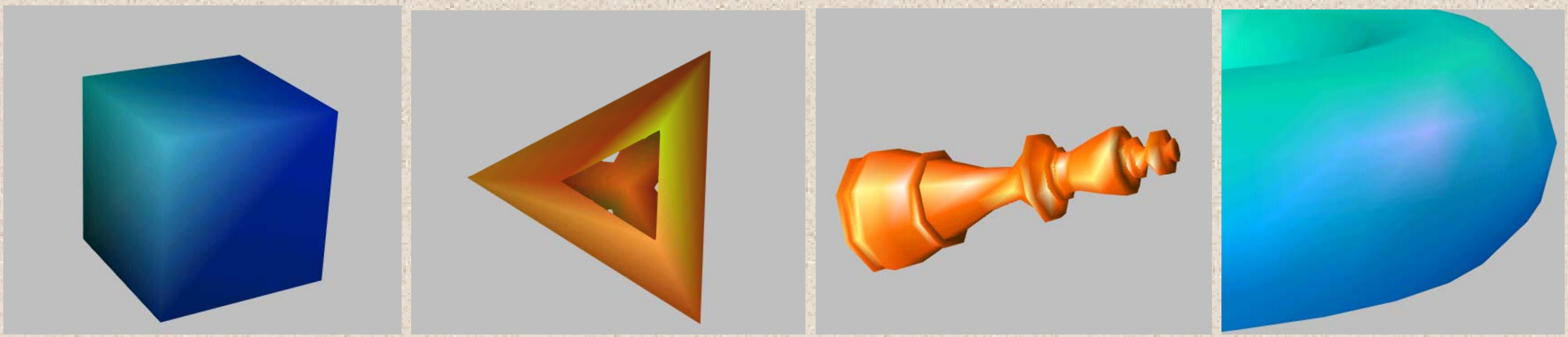





Гладко восполненная геометрия


Почти Би-Кубическая интерполяция

Начальная геометрия



Гладко восполненная геометрия