

Гомеоморфное отображение циркулярных фигур

Никита Ломов

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Москва, Россия

nikita-lomov@mail.ru

Аннотация

В статье предложен метод построения гомеоморфизма двух замкнутых односвязных областей, представленных в виде силуэтов циркулярных фигур. Цель работы — построить такое гомеоморфное отображение, в котором образ будет сохранять содержательный смысл прообраза, в частности, сохранится взаимное расположение значимых частей силуэта. Описан способ сегментации изображения на основе его циркулярного представления. Метод может быть использован для приложенных в компьютерной графике и для решения задач распознавания изображений.

Ключевые слова: гомеоморфизм, циркулярная фигура, сегментация изображений, нормализованные координаты.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вследствие теоремы Римана об отображении, две односвязные замкнутые области на плоскости топологически эквивалентны, т.е. существует непрерывное взаимно-однозначное отображение одной области на другую, обратное к которому также непрерывно. Теоретически такое отображение может быть построено бесконечным числом способов. Однако для приложений в компьютерной графике и распознавании изображений интерес представляют далеко не все такие отображения, а лишь те из них, которые сохраняют «содержательный смысл» прообраза. Например, подобные отображения могут найти применение в традиционной анимации. При производстве рисованного фильма художники-прорисовщики создают только ключевые кадры, а задача отрисовки промежуточных фаз ложится на плечи художников-фазовщиков. Этот трудоемкий процесс можно автоматизировать, разработав методы построения силуэтов персонажей и предметов в промежуточных кадрах и раскраски этих силуэтов по эталонам, заданным ключевыми кадрами. Способы автоматического создания промежуточных фаз анимации описаны в работах [1] и [2].

Широкими возможностями для анализа и модификации формы изображения обладает его циркулярное представление [3, стр. 189]. Идея подхода заключается в том, чтобы для исходного дискретного представления фигуры получить адекватное непрерывное представление в виде семейства кругов с центрами в точках некоторого графа, который называют осевым. Мы будем рассматривать циркулярную фигуру как совокупность отдельных штрихов — жирных линий [4], каждая из которых соответствует одному из ребер осевого графа. Предложенный в данной статье способ сегментации изображений использует принцип, похожий на описанный в работе [5]: мы выделяем в изображении ключевые линии и относим каждую точку изображения к какой-либо из этих линий. Гомеоморфизм будем строить так, чтобы для каждой точки сохранить при отображении значение некоторой функции, характеризующей близость точки к осевому графу циркулярной фигуры.

2. СЕГМЕНТАЦИЯ ЦИРКУЛЯРНЫХ ФИГУР

Под *сегментацией* (декомпозицией) фигуры будем понимать ее разбиение на конечное множество областей (сегментов).

Аналогично [6] будем разбивать фигуру на собственные области ребер графа (только не скелетного, а осевого), в результате получим *осевую сегментацию*. Для описания положения точки в жирной будем использовать *циркулярные координаты* [3, стр. 199]. *Концевыми округлениями* R_a и R_b назовем множества точек жирной кривой, для которых $\tau = 0$ и $\tau = 1$ соответственно.

Пусть циркулярная фигура состоит из n жирных линий, для каждой из которых $t \in [a, b]$. Введем следующие обозначения:

- F_k , $k = 1, \dots, n$ — жирные линии;
- P_k , $k = 1, \dots, n$ — их оси, т.е. ребра осевого графа;
- $\lambda_k(M)$, $\tau_k(M)$, $\theta_k(M)$, $\sigma_k(M)$ — циркулярные координаты точки M в k -ой жирной линии;
- I_M — множество номеров тех жирных линий, которым принадлежит точка M ;
- $\rho_k(M)$ — минимальное расстояние от точки M до края дуги конечного округления слоя глубины $\lambda(M)$.

Объединение всех λ -слоев жирных линий, образующих циркулярный граф C , будем называть λ -силуэтом этого графа. Очевидно, что каждая точка циркулярной фигуры является граничной для некоторого λ -силуэта. Назовем величину λ *уровнем* соответствующей точки. Значение λ характеризует близость точки к осевому графу циркулярной фигуры и равно минимальной глубине точки в тех жирных линиях, составляющих циркулярную фигуру, которым эта точка принадлежит: $\lambda = \min_{k \in I_M} \lambda_k$. Мы дадим такое определение собственной области, которое позволит сохранить уровень точки в циркулярной фигуре при гомеоморфном отображении.

Собственной областью S_k ребра P_k (жирной линии F_k) осевого графа T будем называть объединение множеств A_k и B_k : $S_k = (A_k \cup B_k)$, где

- $A_k = \left\{ M \in F_k \mid \tau_k(M) \in (0, 1); \lambda_k(M) = \min_{i \in I_M} \lambda_i \right\}$;
- $B_k = \left\{ M \in F_k \mid \tau_k(M) \in \{0, 1\}; \rho_k(M) = \min_{i \in I_M, \lambda_i(M) = \lambda_k(M)} \rho_i(M) \right\}$.

При таком определении собственной области на границе между двумя смежными областями S_k и S_m выполнено условие $\lambda_k = \lambda_m$. Из этого следует, что для последовательностей $\{K^i\}$ и $\{M^i\}$, составленных из точек собственных областей S_k и S_m соответственно и сходящихся к одной и той же точке границы, соответствующие им последовательности глубин $\{\lambda_k^i\}$ и $\{\lambda_m^i\}$ имеют равные пределы.

Пример сегментации циркулярной фигуры приведен на рис. 1. Два скелета считают *изоморфными* [7], если они изоморфны как графы и при обходе вершин сохраняется последовательность висячих вершин, соответствующих друг другу в изоморфизме графов. Применяв это определение не к скелетам, а к осевым графам, введем понятие изоморфизма осевых графов. Заметим, что ребра осевых графов можно сделать ориентированным таким образом, чтобы графы остались изоморфными. *Графом смежности сегментации* будем называть плоский граф, вершины которого соответствуют сегментам, две верши-

ны соединены ребром, когда соответствующие им сегменты являются смежными в разбиении (то есть имеют общую границу). Сегментации называют изоморфными, если изоморфны их графы смежности. Чтобы гарантированно получить изоморфные сегментации из циркулярных фигур с изоморфными осевыми графами, нужно предъявить к циркулярам дополнительные требования. Если выполняются следующие условия:

- жирные линии пересекаются только в том случае, если их осевые линии — смежные ребра;
- для любой пары различных жирных кривых F_k и F_m $F_k \setminus F_m$ — связное множество, $F_k \cap F_m$ — связное или пустое множество;
- любая жирная кривая имеет участок границы, который не пересекается ни с какой другой жирной кривой;

собственные области жирных кривых будут иметь общую границу только тогда, когда оси этих жирных линий имеют общую вершину и при обходе ребер, инцидентных этой вершине, по кругу осевые линии следуют друг за другом. Если рассматривать концевые округления висячих вершин в качестве отдельных сегментов, необходимо также потребовать, чтобы они не пересекались с другими жирными линиями. Циркуляр, который отвечает вышеуказанным требованиям, будем называть циркуляром *общего положения*.

3. ГРАНИЦЫ МЕЖДУ СОБСТВЕННЫМИ ОБЛАСТЯМИ

Будем считать, что ребра осевого графа T циркулярной фигуры S произвольным образом ориентированы. Ось P разделяет собственную область S на две части. Будем называть *правой* собственной областью ту часть, граница которой содержит часть правой огибающей жирной линии F (возможно, всю огибающую), *левой* собственной областью — область, границе которой принадлежит часть левой огибающей. Важно, что после такого подразделения изоморфные осевые сегментации остаются изоморфными. В дальнейшем под собственной областью ребра будем понимать его правую или левую собственную область, а не их объединение.

Разрезом будем называть общую часть границы двух смежных собственных областей. Пусть C — циркуляр общего положения. Рассмотрим жирные линии $F_1 = (u_1(t), v_1(t), r_1(t))$ и $F_2 = (u_2(t), v_2(t), r_2(t))$, имеющие общий концевой круг. Не ограничивая общности, будем считать, что он является начальным в обеих линиях. Пусть при обходе ребер, инцидентных общей вершине осей жирных линий, по часовой стрелке оси P_1 и P_2 следуют друг за другом. Это означает, что правая собственная область F_1 имеет общую границу с левой собственной областью F_2 . Рассмотрим взаимное расположение правой огибающей λ -слоя F_1 и левой огибающей λ -слоя F_2 .

Уравнения правой огибающей [3, стр. 184]:

$$\begin{cases} x_1(t_1, \lambda) = u_1 - \frac{\lambda^2 u_1' r_1' r_1}{u_1'^2 + v_1'^2} + \frac{\lambda v_1' r_1 \sqrt{u_1'^2 + v_1'^2 - \lambda^2 r_1'^2}}{u_1'^2 + v_1'^2}, \\ y_1(t_1, \lambda) = v_1 - \frac{\lambda^2 v_1' r_1' r_1}{u_1'^2 + v_1'^2} - \frac{\lambda u_1' r_1 \sqrt{u_1'^2 + v_1'^2 - \lambda^2 r_1'^2}}{u_1'^2 + v_1'^2}. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения левой огибающей:

$$\begin{cases} x_2(t_2, \lambda) = u_2 - \frac{\lambda^2 u_2' r_2' r_2}{u_2'^2 + v_2'^2} - \frac{\lambda v_2' r_2 \sqrt{u_2'^2 + v_2'^2 - \lambda^2 r_2'^2}}{u_2'^2 + v_2'^2}, \\ y_2(t_2, \lambda) = v_2 - \frac{\lambda^2 v_2' r_2' r_2}{u_2'^2 + v_2'^2} + \frac{\lambda u_2' r_2 \sqrt{u_2'^2 + v_2'^2 - \lambda^2 r_2'^2}}{u_2'^2 + v_2'^2}. \end{cases} \quad (2)$$

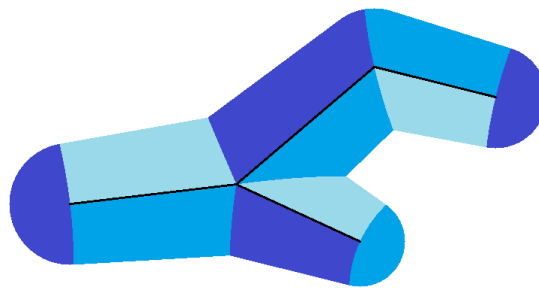


Рис. 1: Разбиение фигуры на собственные области

Для того чтобы определить точку пересечения огибающих, необходимо решить систему уравнений относительно (t_1, t_2) :

$$\begin{cases} x_1(t_1, \lambda) = x_2(t_2, \lambda), \\ y_1(t_1, \lambda) = y_2(t_2, \lambda). \end{cases} \quad (3)$$

Если решение системы $(t_1, t_2), t_1, t_2 \in [0, 1]$ существует и единственно при всех $\lambda \in [0, 1]$, то функции $t_1 = t_1(\lambda), t_2 = t_2(\lambda)$ непрерывно дифференцируемы, поскольку непрерывно дифференцируемы функции $u_1', v_1', r_1', u_2', v_2', r_2'$, и разрез задается уравнениями

$$\begin{cases} x(\lambda) = x_1(t_1(\lambda), \lambda), \\ y(\lambda) = y_1(t_1(\lambda), \lambda). \end{cases} \quad (4)$$

Такой разрез будем называть разрезом *1-го типа*.

Если система имеет решение только при $\lambda = 0$, то границы λ -слоев жирных линий имеют общую часть концевой дуги. Согласно определению собственной области, разрезу принадлежит точка дуги, равноудаленная от ее концов, т.е. разделяющая дугу пополам. Угловая величина $\alpha(\lambda)$ общей дуги является непрерывно дифференцируемой функцией на интервале $[0, 1]$, следовательно, функции $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$, задающие разрез, также непрерывно дифференцируемы. Разрезы, состоящие из центральных точек общих концевых дуг, будем называть разрезами *2-го типа*.

Для терминального ребра, ориентированного к висячей вершине (от висячей вершины), разрез между собственной областью и концевым округлением задается уравнением $t = 1$ ($t = 0$) и также имеет одну и только одну точку уровня $\lambda, \lambda \in [0, 1]$.

4. РАСЧЕТ ГОМЕОМОРФИЗМА

4.1 Нормализованные координаты

Верхним разрезом собственной области будем называть разрез, которому принадлежит конечная точка оси, соответственно, *нижним разрезом* — разрез, содержащий начальную точку оси. *Линией λ -уровня* собственной области будем называть лежащую в собственной области кривую, заданную уравнением $\lambda = const$.

Если собственная область содержит часть концевого округления, поставим в соответствие каждой точке концевого округления пару чисел (t, λ) , где

- λ — соответствующая циркулярная координата;
- для точек верхнего концевого округления $t \geq 1$, нижнего концевого округления $t \leq 0$;
- значения $(x'(t, \lambda))^2 + (y'(t, \lambda))^2$ на дугах вида $\lambda = \lambda_0, t \geq 1$ ($t \leq 0$) постоянны;
- значения частных производных $\frac{\partial x(t, \lambda)}{\partial t}, \frac{\partial y(t, \lambda)}{\partial t}$ на концах дуг совпадают с соответствующими значениями на концах огибающих 1–2.

Теперь мы можем задать верхний и нижний разрезы (как 1-го, так и 2-го типа) функциями $t = g(\lambda), t = h(\lambda) \in C^1[0, 1]$ и получить взаимно однозначное соответствие между точками собственной области и множеством $\{\lambda \in [0, 1], t \in [g(\lambda), h(\lambda)]\}$. Отметим, что функции $x(t, \lambda)$ и $y(t, \lambda)$ непрерывно дифференцируемы всюду в собственной области.

Наконец, приведем все координаты к единому диапазону. Определим относительное положение точки с координатами (t_0, λ_0) на линии λ -уровня:

$$\mu(t_0, \lambda_0) = \frac{\int_{g(\lambda_0)}^{t_0} \sqrt{(x'(\tau, \lambda_0))^2 + (y'(\tau, \lambda_0))^2} d\tau}{\int_{g(\lambda_0)}^{h(\lambda_0)} \sqrt{(x'(\tau, \lambda_0))^2 + (y'(\tau, \lambda_0))^2} d\tau}. \quad (5)$$

Пару чисел $(\mu, \lambda), \mu, \lambda \in [0, 1]$, будем называть *нормализованными координатами* точки в собственной области. Таким образом, мы получили взаимно-однозначное соответствие между точками собственной области и множеством $[0, 1] \times [0, 1]$. Например, точка M на рис. 2 имеет нормализованные координаты $(0,7; 0,6)$.

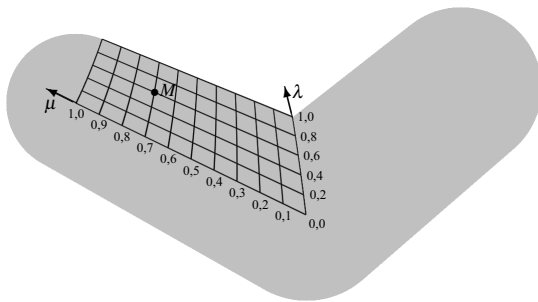


Рис. 2: Координатная сетка собственной области

Нормализованными координатами точки концевой округления будем называть пару чисел $(\theta, \lambda), \theta, \lambda \in [0, 1]$, имеющих те же значения, что и циркулярные координаты этой точки в жирной линии.

4.2 Доказательство гомеоморфности отображения

Утверждение 1. Отображение $f : S \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$, которое ставит в соответствие точке собственной области ее нормализованные координаты, является гладким гомеоморфизмом. **Доказательство.** Взаимная однозначность отображения очевидна, покажем его гладкость. Отображения $(t, \lambda) \rightarrow (\mu, \lambda)$ и $(\mu, \lambda) \rightarrow (t, \lambda)$ — гладкие. Отображение $(t, \lambda) \rightarrow (x, y)$ также гладкое, и векторы касательных к кривым вида $t = t_0$ и $\lambda = \lambda_0$ нигде в собственной области не коллинеарны. По теореме о разрешимости системы функциональных уравнений [8, стр. 609] всюду в собственной области определено гладкое отображение $(x, y) \rightarrow (t, \lambda)$. Тогда отображения $(\mu, \lambda) \rightarrow (x, y)$ и $(x, y) \rightarrow (\mu, \lambda)$ будут гладкими как суперпозиции гладких отображений.

Утверждение 2. Отображение $f : R_a \rightarrow R_b$ одного концевой округления на другое с сохранением нормализованных координат является гладким гомеоморфизмом. **Доказательство.** Это следует из того, что угловая величина дуги концевой округления $\alpha(\lambda) \in C^1[0, 1]$ (в точке $\lambda = 0$ доопределим функцию по непрерывности), и одно концевое округление получается из другого равномерным растяжением его дуг.

Утверждение 3. Пусть C_1 и C_2 — циркуляры общего положения

с изоморфными осевыми графами и силуэтами D_1 и D_2 . Отображение $Q : D_1 \rightarrow D_2$, которое ставит в соответствие точке прообраза точку соответствующей в изоморфизме сегментаций собственной области с теми же нормализованными координатами, является гомеоморфизмом. **Доказательство.** Отображение между двумя собственными областями и двумя концевыми округлениями является гомеоморфным. Осталось рассмотреть последовательности точек $\{M_n\}$, сходящиеся к точке разреза. Если существует не менее трех собственных областей, содержащих бесконечное число точек последовательности, то последовательность сходится к вершине v осевого графа T_1 , $\deg(v) \geq 3$, и все подпоследовательности образов сходятся к соответствующей ей в изоморфизме вершине v' осевого графа T_2 . Теперь рассмотрим случай, когда таких областей ровно две. Очевидно, что все предельные точки последовательности $\{Q(M_n)\}$ принадлежат одному и тому же разрезу. Так как последовательность уровней точек сходится, и отображение сохраняет значение уровня, то все предельные точки $\{Q(M_n)\}$ имеют уровень, равный предельному, а для каждого разреза такая точка существует и единственна. Таким образом, последовательность $\{Q(M_n)\}$ имеет только одну предельную точку, и отображение является непрерывным. Для доказательства непрерывности обратного отображения, можно заметить, что если Q' — отображение D_2 на D_1 , построенное по тому же принципу, то отображение $Q' \circ Q$ — тождественное.

4.3 Алгоритм расчета гомеоморфизма

Для того чтобы определить координаты (x, y) образа точки M , необходимо выполнить следующую последовательность шагов:

1. Определить множество жирных линий, содержащих точку M .
2. Определить λ -координаты точки в этих жирных линиях.
3. Выбрать жирную линию с наименьшим значением λ . Если таких линий несколько,
 - для точки, принадлежащей концевым округлениям, следует выбрать линию с минимальным расстоянием от точки до края огибающей λ -слоя;
 - для точки, не принадлежащей концевым округлениям, можно выбрать любую из жирных линий, поскольку точка принадлежит разрезу.
4. Определить сторону собственной области:
 - для точки из множества A сторона определяется циркулярной координатой σ ;
 - для точки из множества B — стороной огибающей, расстояние до края которой минимально.
5. Найти концы A и B линии λ -уровня — точки $(t_1(\lambda), \lambda)$ и $(t_2(\lambda), \lambda)$, принадлежащие разрезам.
6. Вычислить нормализованную координату $\mu = \frac{l(AM)}{l(AB)}$.
7. Найти аналогичные концы линии λ -уровня в собственной области образа — точки A' и B' .
8. Определить координату t точки с тем же значением μ .
9. Если $t > 1$ или $t < 0$, вычислить циркулярную координату θ .
10. Используя циркулярные координаты, определить положение точки на плоскости.

5. ПРИМЕР ПРОСТОГО ШАРНИРА

Простым шарниром назовем циркулярную фигуру, состоящую из двух жирных кривых Безье [4] первого порядка. Так как огибающие частей шарнира являются отрезками прямых, уравнения в системе 3 — линейные, и выражения для разреза

1-го типа можно получить в явном виде. Пусть

$$F_1 = (u_1(t), v_1(t), r_1(t)), F_2 = (u_2(t), v_2(t), r_2(t)),$$

$$u_i = u_0 + a_i t, v_i = v_0 + b_i t, r_i = r_0 + c_i t, i = 1, 2.$$

Обозначим $l_1^2 = a_1^2 + b_1^2, l_2^2 = a_2^2 + b_2^2$. Тогда система, задающая точки разреза, примет вид:

$$\begin{cases} a_1 t_1 - \frac{\lambda^2 a_1 c_1 (r_0 + c_1 t_1)}{l_1^2} \pm \frac{\lambda b_1 (r_0 + c_1 t_1) \sqrt{l_1^2 - \lambda^2 c_1^2}}{l_1^2} = \\ = a_2 t_2 - \frac{\lambda^2 a_2 c_2 (r_0 + c_2 t_2)}{l_2^2} \mp \frac{\lambda b_2 (r_0 + c_2 t_2) \sqrt{l_2^2 - \lambda^2 c_2^2}}{l_2^2}, \\ b_1 t_1 - \frac{\lambda^2 b_1 c_1 (r_0 + c_1 t_1)}{l_1^2} \mp \frac{\lambda a_1 (r_0 + c_1 t_1) \sqrt{l_1^2 - \lambda^2 c_1^2}}{l_1^2} = \\ = b_2 t_2 - \frac{\lambda^2 b_2 c_2 (r_0 + c_2 t_2)}{l_2^2} \pm \frac{\lambda a_2 (r_0 + c_2 t_2) \sqrt{l_2^2 - \lambda^2 c_2^2}}{l_2^2}. \end{cases} \quad (6)$$

Эталонная раскраска простых шарниров с различными комбинациями типов разрезов показана на рис. 3–4.

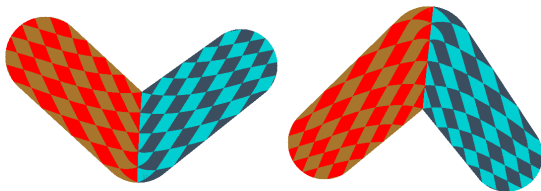


Рис. 3: Простые шарниры с разрезами разных типов

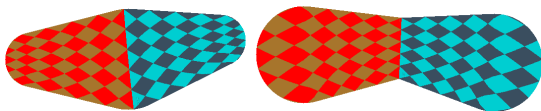


Рис. 4: Простые шарниры с разрезами одного типа

Простой шарнир можно использовать в качестве элементарного «строительного блока» при приближении формы фигуры простыми многоугольниками. При этом можно снять ограничение на гладкость осей и аппроксимировать их ломаными. Тогда линиями λ -уровня собственной области будут не границы λ -слоев, а границы λ -силуэтов. Другой возможный подход — использовать составные жирные кривые Безье с кривыми 1-й степени на концах. Для таких кривых поиск точки разреза сводится к решению системы линейных уравнений, как и в случае простого шарнира.

Наконец, можно развить предложенную в [9] идею ворпирования и строить контейнер в виде такой композиции простых жирных линий, которая бы полностью включала в себя преобразуемый объект. Пример преобразования растрового образа через аппроксимацию простым шарниром представлен на рис. 5–6.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в статье метод решает проблему неоднозначности, возникающую при преобразовании сложной композиции, составленной из нескольких пересекающихся жирных линий и существенно расширяет класс топологических преобразований над растровыми изображениями. Однако корректная работа метода возможна лишь в том случае, если рассматриваемые системы нелинейных уравнений имеют одно и только одно решение. Кроме того, поиск решения таких систем и

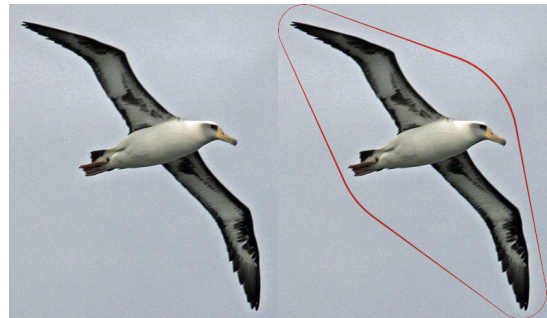


Рис. 5: Аппроксимация образа простым шарниром

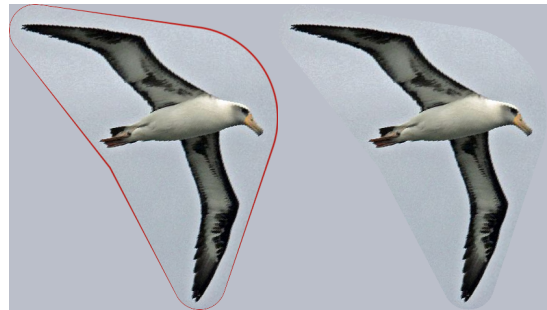


Рис. 6: Контейнерное преобразование растрового образа

необходимые преобразования координат требуют значительных вычислительных затрат. Эффективная программная реализация может открыть методу широкие перспективы для применения в компьютерной графике и решения задач распознавания.

7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] W. Van Haevre, F. Di Fiore, F. Van Reeth. *Uniting Cartoon Textures with Computer Assisted Animation*. Proceedings of the 3rd International Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques in Australia and Southeast Asia, 2005, pp. 245–253.
- [2] A. Kort. *Computer Aided Inbetweening*. Proceedings of the 2nd international symposium on Non-photorealistic animation and rendering, 2002, pp. 125–132.
- [3] Л.М. Местецкий. *Непрерывная морфология бинарных изображений* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
- [4] Л.М. Местецкий. *Компьютерная графика на основе жирных линий*. Тр. межд. конф. «Графикон-2000». — М.: МГУ, 2000. — С 165–173.
- [5] K. Melikhov, F. Tian, H.S. Seah, Q. Chen, J. Qiu. *Frame Skeleton Based Auto-Inbetweening in Computer Assisted Cel Animation*. Proceedings of the 2004 International Conference on Cyberworlds, 2004, pp. 216–223.
- [6] Л.Г. Домахина. *Об одном методе сегментации объектов для задач преобразования формы*. Труды 13-й Всероссийской конф. «Математические методы распознавания образов» (ММРО-13). С. 311–314.
- [7] Л.Г. Домахина, А.Д. Охлопков. *Изоморфные скелеты растровых изображений*. Тр. межд. конф. «Графикон-2008». — М.: МГУ, 2008.
- [8] В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. *Математический анализ (начальный курс), ч.1* — М.: МГУ, 1985.
- [9] Л.М. Местецкий, А.Б. Семенов. *Преобразование цветных изображений на основе жирных B-сплайновых кривых*. Тр. межд. конф. «Графикон-2003». — М.: МГУ, 2003. С. 235–242.