

# Методы визуализации трехмерных данных на декартовых локально измельченных сетках

Александр Дядькин, Алексей Гудзовский  
Институт автоматизации проектирования РАН  
Москва, Россия

## Аннотация

Обсуждаются методы визуализации скалярного поля, заданного в центрах ячеек адаптивной декартовой сетки с локальным измельчением ячеек. Локальное измельчение может, в частности, использоваться для улучшения изображения скалярного поля. Процедура локального измельчения ячеек сопровождается интерполяцией данных, в ходе которой происходит искажение информации. Приведены результаты исследования влияния локального разбиения сетки и способа интерполяции данных на качество получаемого изображения для различных способов визуализации скалярного поля.

**Ключевые слова:** объемная визуализация, локально измельченная сетка, интерполяция данных.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Одно из перспективных направлений вычислительной гидродинамики связано с применением декартовых сеток с адаптивным локальным измельчением ячеек. Локально измельченные сетки (ЛИС) занимают промежуточное положение между структурированными декартовыми сетками и неструктурированными конечно-элементными сетками, что позволяет сочетать достоинства подходов, основанных на разных типах сеток [1]. Для анализа данных, полученных на такой сетке, требуется разработка соответствующих методов визуализации. В работе рассматриваются методы построения изоповерхности и объемной визуализации

скалярной функции, заданной на локально измельченной сетке.

В разделе 2 кратко описывается структура ЛИС. В разделе 3 приведена технология построения изоповерхности и объемного изображения скалярной величины на заданной ЛИС. Результаты, полученные для тестового объекта, анализируются в разделе 4. В разделе 4.1 рассматривается влияние уровня измельчения на качество изображения, а в разделе 4.2 - роль метода интерполяции. В заключение в разделе 5 подведены итоги и сделано заключение.

## 2. СЕТКА С ЛОКАЛЬНЫМ ИЗМЕЛЬЧЕНИЕМ

Построение прямоугольной сетки с локальным измельчением проводится следующим образом. Первоначально в области строится декартовая сетка, именуемая далее сеткой с измельчением уровня 0. Затем выделяются подобласти, в которых необходима более мелкая сетка. Например, они могут быть связаны с особенностями геометрии или полей расчетных величин.

На этапе измельчения каждая ячейка, попавшая в выделенные подобласти, делится на 8 равных дочерних ячеек (Рис.1). Полученные после разбиения ячейки уровня 1 также могут быть разделены с образованием ячеек уровня 2 и так далее. При необходимости может происходить и слияние ранее разбитых ячеек. При генерации ЛИС накладывается условие, что ячейки, граничащие гранями и ребрами, имеют номера уровней, отличающиеся не более, чем на единицу.

Существенным отличием ЛИС от сеток других

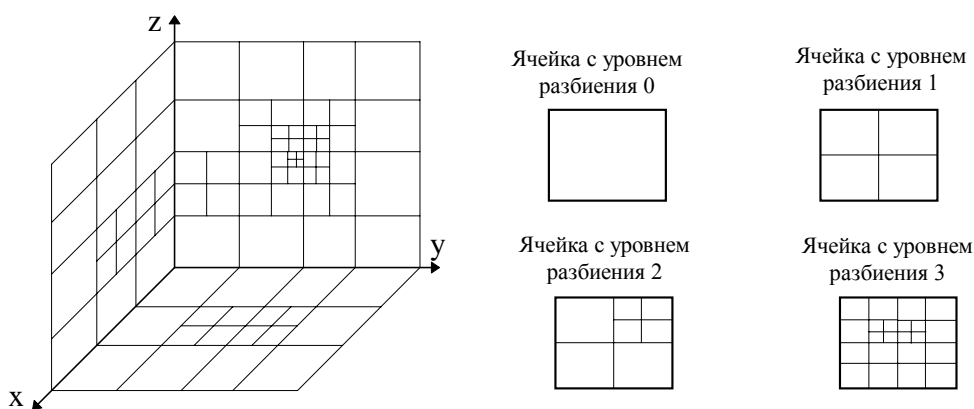


Рис. 1. Адаптивная сетка с локальным измельчением

типов является то, что число соседних ячеек ЛИС может быть разным. Соседними будем называть ячейки, которые соприкасаются с данной ячейкой по граням, ребрам или вершине. Для ячейки ЛИС в трехмерном случае число соседей по грани равно 1 или 4, по ребру - 0, 1 или 2, по вершине - 0 или 1. Это обстоятельство усложняет работу с ЛИС.

Поле скалярной функции задается величинами в центрах ячеек. Разбиение и слияние ячеек сопровождается переносом данных с одной сетки на другую. Интерполяция данных приводит к искажениям, связанные с тем, что при каждом акте интерполяции вычисляются значения в новых точках, а значения в старых точках исключаются.

### **3. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ ДАННЫХ, ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ЛИС**

В данном разделе рассмотрены технологии построения изоповерхности и объемного изображения для данных, определенных на ЛИС.

Из-за того, что, ячейки ЛИС могут соприкасаться с разным количеством соседних ячеек, при построении изоповерхности нельзя использовать методы, ориентированные на сетки с фиксированной структурой (например, "marching cubes" для декартовой сетки [2]). Ниже в разделе 3.1 описывается способ построения изоповерхности на сетке с локальным измельчением.

При построении объемного изображения структура сетки влияет на метод вычисления оптической плотности вдоль луча, рассмотренный в разделе 3.2.

#### **3.1 Технология построения изоповерхности на сетке с локальным измельчением**

Построение изоповерхности состоит из следующих этапов:

1. Вся область разбивается на набор многогранников, которые полностью заполняют весь объем.
2. Внутри каждого многогранника находится совокупность многоугольников (фасеток), образующих изоповерхность.
3. В вершинах фасеток находятся вектора нормали к изоповерхности и фасетки закрашиваются по Фонгу.
4. Фасетки выводятся на экран с использованием Z-буфера.

Подробнее остановимся на первом этапе. Применяемый в настоящей работе метод декомпозиции области на многогранники основан на структуре сетки с локальным измельчением и состоит из следующих шагов.

1. Последовательно обходятся все ячейки. Для текущей ячейки с центром в точке **A** находятся все соседние ячейки, которые граничат с ней либо по

граням, либо по ребрам, либо по вершине, расположенным в направлении возрастания координат. Центры всех найденных ячеек (включая точку **A**), которые граничат друг с другом по граням, соединяются отрезками. Эти отрезки образуют грани невыпуклого многогранника. Множество таких многогранников, построенных для всех ячеек, заполняет весь объем расчетной области. Полученные многогранники могут иметь от 5 до 20 вершин, их грани имеют форму треугольника или четырехугольника. Каждый многогранник разбивается на тетраэдры так, чтобы соседние тетраэдры имели совпадающие грани. Эта операция описана в двух следующих пунктах.

2. Каждая из граней многогранника разбивается на набор треугольников, состоящих из ребер, построенных на этапе 1, и дополнительных ребер. Последние образуются при соединении точки с минимальными координатами для данной грани со всеми остальными точками. Такой прием гарантирует, что при переходе к следующей ячейке соприкасающиеся грани будут совпадать. Совпадение граней соседних тетраэдров гарантирует, что в месте стыка тетраэдров будут отсутствовать разрывы изоповерхности.

3. Далее строятся тетраэдры, одной из вершин которых является точка **A**, а основанием - треугольником, полученные на предыдущем этапе и не содержащие точку **A**.

На втором этапе при построении изоповерхности внутри каждого тетраэдра возможны три случая: изоповерхность не проходит через тетраэдр, пересечение изоповерхности с тетраэдром образует треугольник или четырехугольник. В последнем случае четырехугольник представляется в виде двух треугольников.

Построение изображения изоповерхности производится с использованием Z-буфера. Это позволяет одновременно выводить на экран несколько различных изоповерхностей и добавлять в рисунок новые изоповерхности и другие элементы изображения. При построении изображения угол освещения принимается равным углу зрения.

#### **3.2 Технология построения объемного изображения с использованием ЛИС**

В настоящей работе объемная визуализация расчетной области проводится путем построения ее "рентгенограммы". Для построения изображения в расчетной области задается определенная связь между коэффициентом поглощения и визуализируемой характеристикой. Далее для луча, выпущенного из каждого пикселя экранной плоскости и перпендикулярного ей, вычисляется оптическая плотность отрезка, проходящего на расчетную область. Оптическая плотность находится интегрированием коэффициента поглощения вдоль луча. Получаемое изображение аналогично

изображению в рентгеновском аппарате, с чем и связано используемое нами наименование.

Так как значения скалярной функции заданы на дискретной прямоугольной сетке, то для определения оптической плотности вдоль луча использовался следующий алгоритм.

- 1) Для каждого пикселя изображения задается луч перпендикулярный экранной плоскости.
- 2) Находится точка входа этого луча в расчетную область.
- 3) Определяется ячейка сетки, в которую входит эта точка и находится точка выхода луча из ячейки.
- 1) Посредством интерполяции значений функции в данной ячейке и окружающих ее соседях определяются значения скалярной функции в точках входа и выхода луча. Оптическая плотность луча при прохождении ячейки определяется как  $r_{opt}^i = 0.5(f_{in} + f_{out})(r_{out} - r_{in})$ .
- 2) По точке выхода из ячейки определяется следующая ячейка, в которую попадет луч.
- 3) Для вновь полученной ячейки выполняются шаги 3-5 до тех пор, пока луч не выйдет из области.
- 4) Определяется полная оптическая плотность вдоль луча  $r_{opt} = \sum_i r_{opt}^i$ .

По оптическим плотностям вдоль лучей, проходящих через все пиксели изображения, находятся цвета этих пикселей и формируется изображение.

#### 4. АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

В качестве тестового объекта визуализации рассматривается сферически симметричное распределение скаляра. Это распределение удобно в качестве теста тем, что для него известны точные изображения изоповерхности и картины при объемной визуализации. Это обстоятельство делает возможным ввести количественную оценку качества изображений, полученных различными методами.

Рассмотрим область размером  $1.0 \times 1.0 \times 1.0$ , в которой сетка с измельчением уровня 0 имеет вид

декартовой сетки размерностью  $10 \times 10 \times 10$  с постоянным шагом. В области задано распределение (именуемое далее аналитическим) скалярной функции

$$F(x, y, z) = 1 - \frac{r}{r_0}, \quad (1)$$

где  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ ,  $x_0=0.5$ ,  $y_0=0.5$ ,  $z_0=0.5$ ,  $r_0=0.3$ .

Сетка уровня 0 является грубой - на изоповерхность  $F(x,y,z)=0$  приходится всего по шесть ячеек в каждом направлении.

Изоповерхность рисуется описанным выше методом в виде набора фасеток с закраской по Фонгу. Величина нормали в углах фасеток определяется численным дифференцированием скалярного поля, заданного в центрах ячеек. Значения функции в центрах ячеек находятся либо из (1), либо путем интерполяции данных.

Точное изображение, являющееся эталоном для сравнения изображений, полученных разными методами, строится непосредственно по функции (1).

На Рис.2 приведено сравнение изображения изоповерхности  $F(x,y,z)=0$ , полученного по данным на сетке уровня 0 (Рис.2а) с эталонным. Рис. 2в представляет собой изображение отклонения от эталона. При его построении цвет пикселя отклонения равен модулю разницы цветов пикселя сравниваемого изображения и эталона, умноженному для большей наглядности на 4. Более темные области изображения соответствуют большему отличию от эталона.

Сумма индексов цветов всех пикселей изображения отклонения  $S$  является количественной интегральной характеристикой точности построенного изображения. Для большей наглядности в дальнейшем мы будем ее нормировать на величину  $S_0$ , соответствующую качеству изображения, при котором цвет каждого пикселя отличается от эталона на 1%. Относительную интегральную характеристику качества изображения  $S/S_0$  будем называть ошибкой изображения. Для приведенного на Рис.2 изображения  $S/S_0=3.94$ .

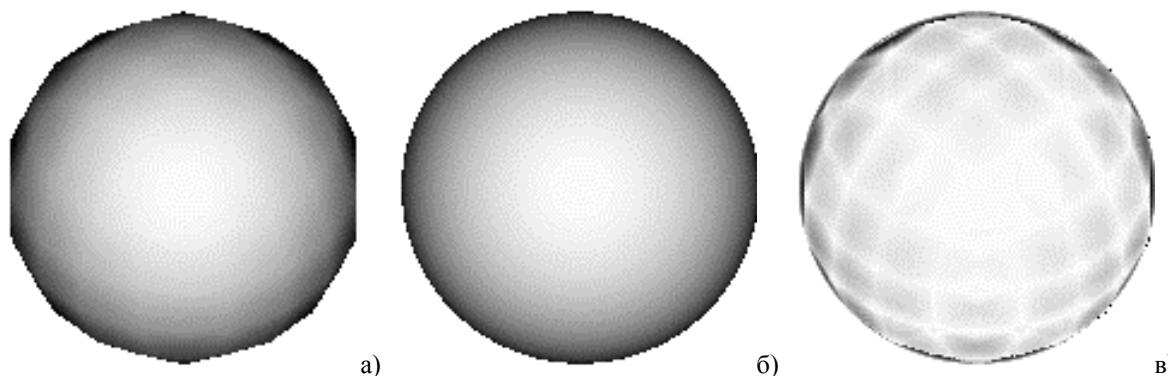
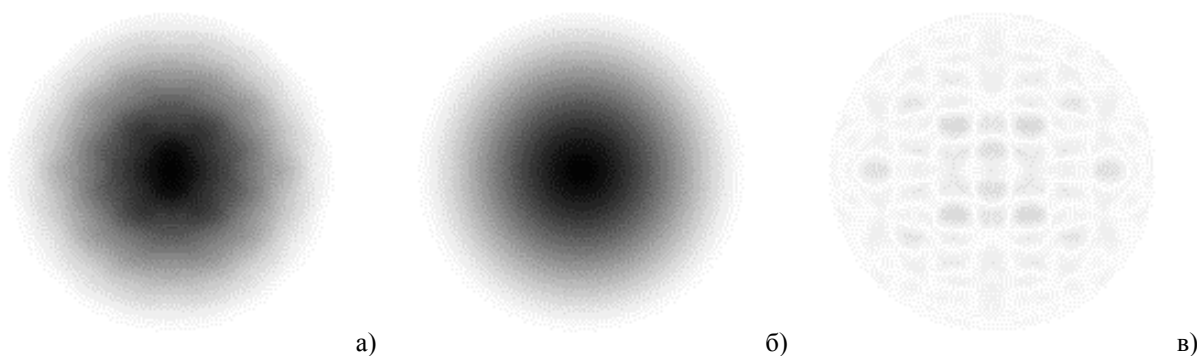


Рис. 2. Изображение изоповерхности  $F(x, y, z)=0$  на сетке уровня 0; (а) - аналитическое распределение, (б) - эталонное изображение, (в) - отклонение от эталона.



**Рис. 3.** Объемное изображение на сетке уровня 0; (а) - аналитическое распределение, (б) - эталонное изображение, (в) - отклонение от эталона

При объемной визуализации в качестве тестового задавалось другое распределение

$$F(x, y, z) = \begin{cases} 1 - \frac{r}{r_0}, & \text{if } r \leq r_0 \\ 0, & \text{if } r > r_0 \end{cases} \quad (2)$$

Здесь также можно ввести понятие эталона (изображение, построенное по функции (2)) и ошибки изображения. На Рис.3 в качестве примера приведены объемное изображение распределения (2), его идеальное изображение и разница между ними (ошибка изображения). Для этого примера  $S/S_0=2.11$ .

#### 4.1 Влияние уровня локального измельчения на качество изображения

В изображении отклонения от эталона на Рис. 2 и 3 ясно проступает структура фасеток, образующих изоповерхность, и структура сетки, на которой задана изображаемая функция.

Так как при измельчении сетки характерные размеры элементов, составляющих изображение (для изоповерхности - это размеры фасеток) уменьшаются, то можно ожидать улучшения качества получаемого изображения.

На Рис.4 показаны отклонения от эталона для аналитического распределения (1) на сетке с локальным измельчением уровня 0, 1 и 2. Видно, что с

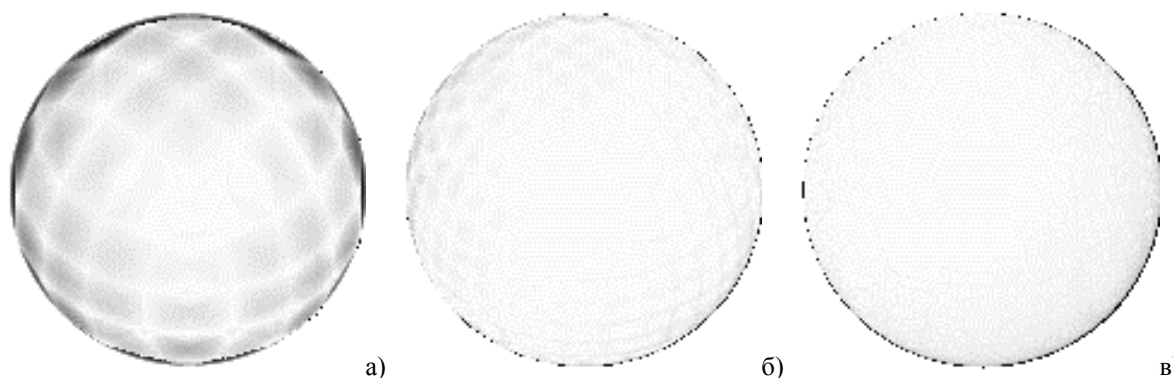
ростом уровня разбиения сетки изображение изоповерхности улучшается, однако разница между Рис. 4б и Рис. 4в мала. Это связано с тем, что фасетки изоповерхности, становятся сравнимыми по размеру с пикселями изображения и их дальнейшее уменьшение не приводит к заметному эффекту.

На Рис.5 показаны изображения отклонения от эталона при объемной визуализации аналитического распределения (2) на сетке с локальным измельчением 0, 1 и 2 уровня. Видно, что разбиение сетки устраняет ошибки изображения, вносимые структурой начальной сетки.

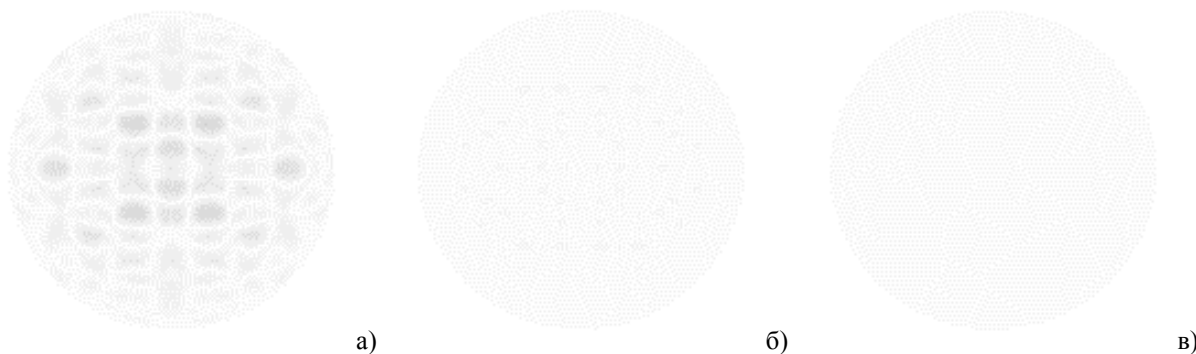
#### 4.2 Влияние метода задания данных на качество изображения

В приведенных выше примерах скалярная функция задается во вновь образуемых при измельчении ячейках с помощью (1) и (2). Но при работе с данными, полученными в результате решения расчетных задач имеется только дискретное распределение данных на сетке некоторого уровня. В этом случае при построении изображения на измельченной сетке необходимо применять процедуру интерполяции, которая вносит искажения в изображение.

Пусть исходное распределение скалярной функции задано на сетке уровня 0. Изображение на сетке уровня 1 строится с применением одной из следующих процедур интерполяции данных:



**Рис. 4.** Изоповерхность  $F(x, y, z)=0$  и отклонение от эталона для различных уровней разбиения сетки, (а) - уровень 0, (б) - уровень 1, (в) - уровень 2



**Рис. 5.** Отклонение объемного изображения от эталона для различных уровней разбиения сетки, (а) - уровень 0, (б) - уровень 1, (в) - уровень 2

- линейная интерполяция (ЛИ);
- консервативная линейная интерполяция (КЛИ);
- градиентная интерполяция (ГИ).

При линейной интерполяции значение функции в центре X дочерней ячейки находится интерполяцией по значениям в вершинах тетраэдра, которыми являются центры ячеек предыдущего уровня (Рис.6). Тетраэдры строятся по технологии, описанной в разделе 3.1. Значение функции в точке X равно

$$f_X = a(f_B - f_A) + b(f_C - f_A) + c(f_D - f_A) + f_A$$

где a, b, c - коэффициенты разложения вектора AX по базовым векторам AB, AC, AD;  $f_A, f_B, f_C, f_D$  - значения функции в вершинах тетраэдра.

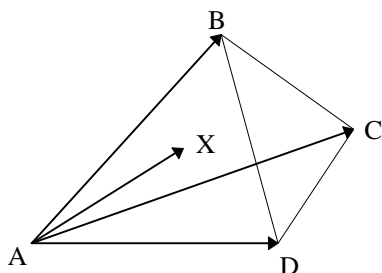
При ЛИ не выполняется закон сохранения, т.е.  $f_0 V_0 \neq \sum_{i=1}^8 f_i V_i$ , где V - объем ячейки, индекс 0 относится

к первоначальной ячейке, а индекс i - к дочерним ячейкам. Поэтому рассмотрена консервативная линейная интерполяция, лишенная этого недостатка.

Если  $f_0 V_0 - \sum_{i=1}^8 f_i V_i = \delta \neq 0$ , тогда выполнения закона

сохранения можно добиться вводя поправку  $f'_i = f_i + \frac{\delta}{V_0}$ .

Третий, градиентный способ интерполяции основан на разложении функции в ряд Тейлора:



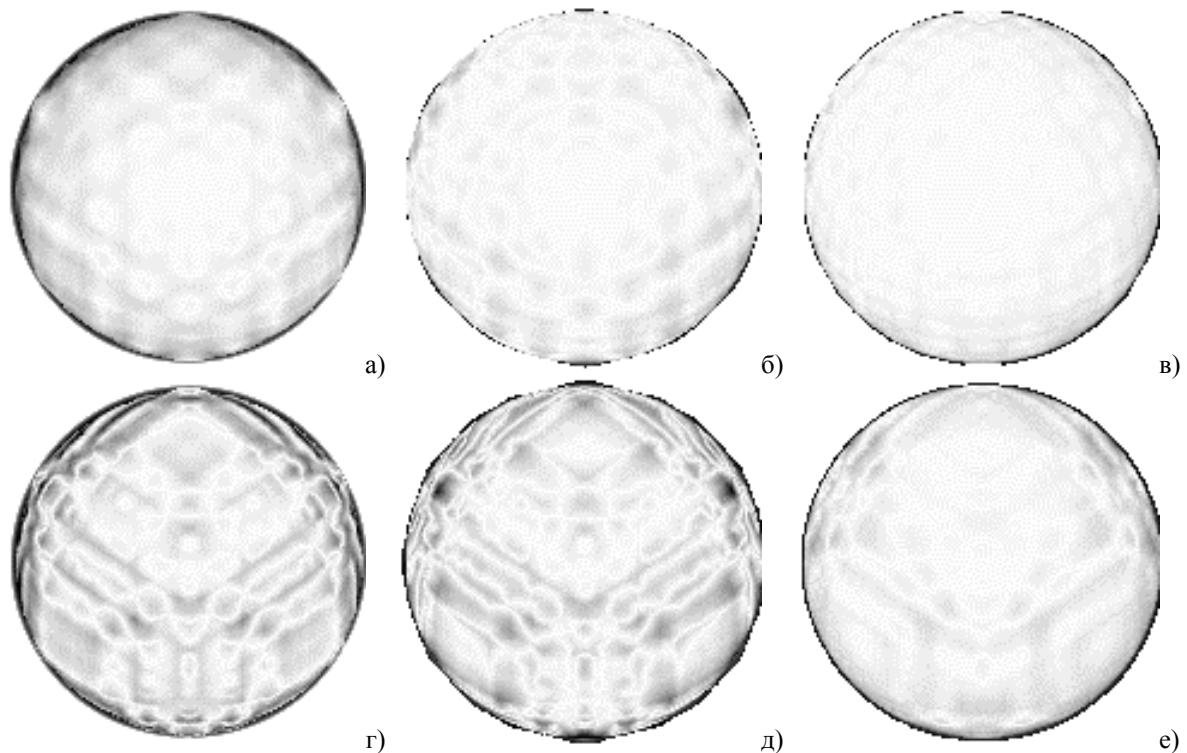
**Рис. 6.** Линейная интерполяция данных при локальном разбиении сетки.

На Рис. 7а,б,в приведены изображения отличия изоповерхности от эталона для упомянутых методов интерполяции. При ЛИ ошибка носит крупномасштабный характер, а при КЛИ - мелкомасштабный характер и значительно меньше по величине. Ошибка при использовании ГИ является минимальной из всех рассмотренных методов и слабо отличается от ошибки при аналитическом задании функции.

На Рис. 7г,д,е показано отличие изоповерхности от идеальной для рассматриваемых методов интерполяции при втором уровне разбиения сетки. Видно, что если на первом уровне разбиения изображение заметно улучшилось, то при втором интегральная ошибка изображения для всех типов интерполяции увеличилась практически в два раза по сравнению с изображением для первого уровня измельчения сетки.

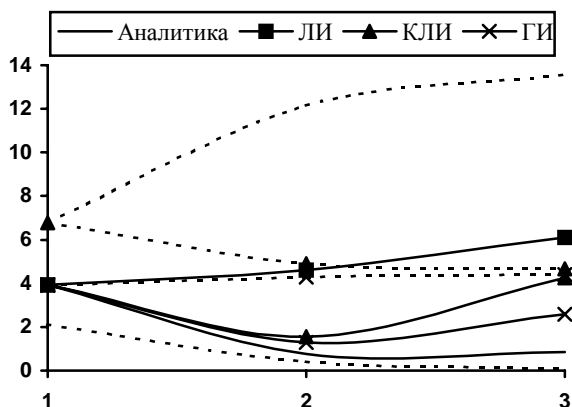
На Рис.8 приведен график зависимости интегральной ошибки от уровня разбиения сетки. Эти зависимости для рассмотренных методов интерполяции имеют минимум, находящийся между первым и вторым уровнем разбиения. Лучшие результаты получаются при использовании градиентного метода интерполяции.

Теперь рассмотрим влияние интерполяции при объемной визуализации данных. В этом случае процедура интерполяции используется не только на этапе разбиения сетки, но и на этапе построения самого изображения. Поэтому даже для нулевого уровня разбиения сетки получаются разные результаты для рассмотренных методов интерполяции.



**Рис. 7.** Изображения отклонения изоповерхностей от эталона для различных методов задания данных и уровней разбиения сетки, (а) - ЛИ, (б) - КЛИ, (в) - ГИ, уровень 1 (а-в), 2 (г-е).

На Рис. 9 приведены ошибки изображения в зависимости от способа интерполяции данных и уровня разбиения сетки. Видно, что при разбиении сетки структура ошибки изображения для всех рассмотренных способов интерполяции практически не меняется. Из Рис.8 также видно, что при использовании ЛИ разбиение сетки только ухудшает изображения. При использовании КЛИ изображение немного улучшается при первом уровне разбиения, а затем практически не изменяется. При ГИ разбиение не влияет на качество изображения. Таким образом, для



**Рис. 8.** Зависимость интегральной ошибки от уровня разбиения сетки и метода интерполяции (сплошные линии - изоповерхность, пунктирные - рентгенограмма)

объемной визуализации при интерполяции данных разбиение сетки не приводит к улучшению качества изображения.

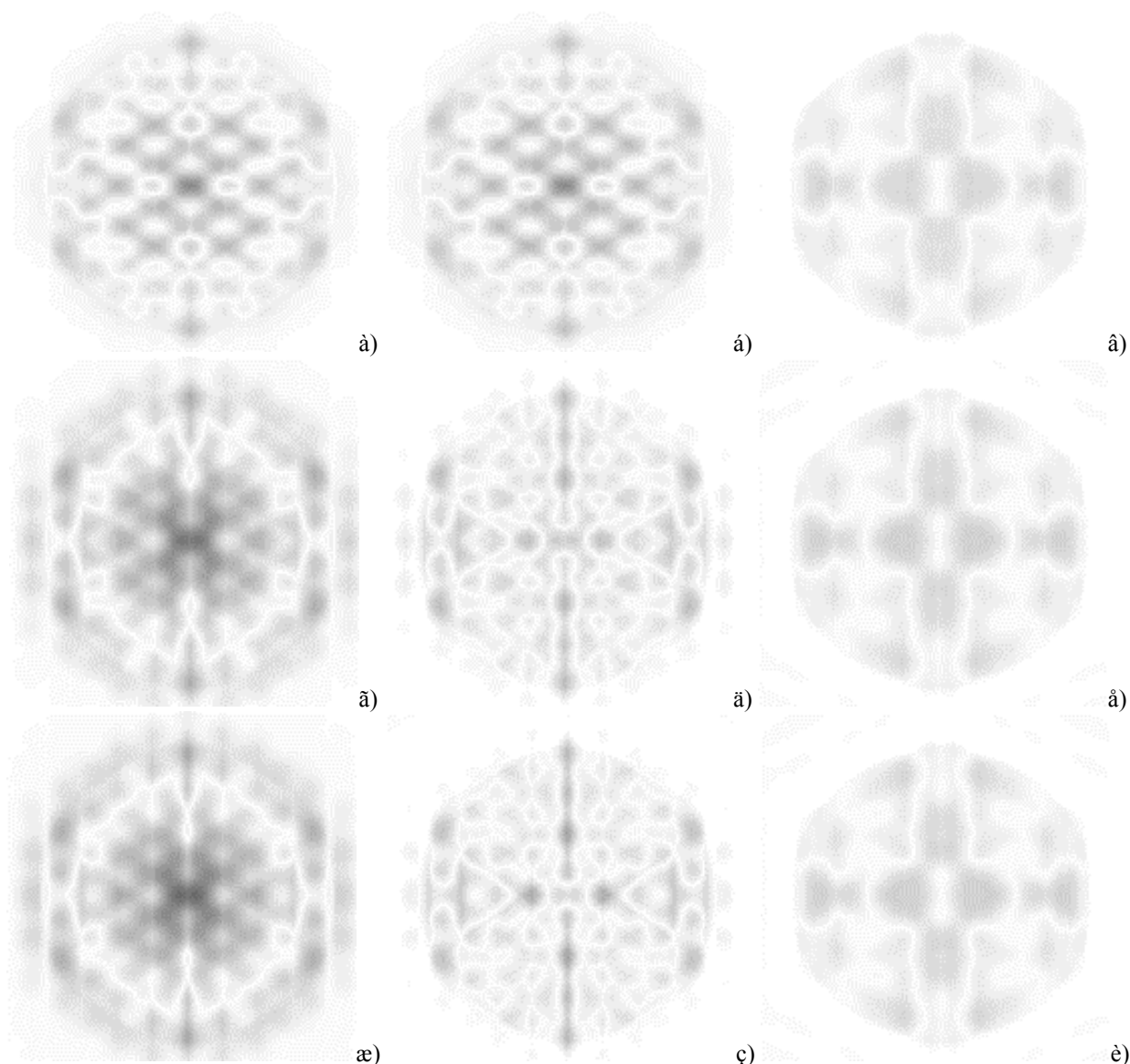
## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На примере двух способов визуализации исследовано влияние локального разбиения сетки и различных методов интерполяции данных на качество получаемого изображения. Установлено, что при визуализации с помощью изоповерхностей локальное разбиение сетки позволяет существенно улучшить качество изображения, но интерполяция данных ограничивает оптимальный уровень измельчения сетки. Использование локального разбиения в случае объемной визуализации не позволяет существенно улучшить качество изображения. Из всех рассмотренных процедур интерполяции наилучшие результаты дает градиентная интерполяция.

Авторы выражают благодарность А.А.Аксенову и С.В.Клименко за внимание к работе. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант N 98-01-00484.

## 6. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Aksenov A., Dyadkin A., Gudzovsky A., Numerical simulation of car tire aquaplaning // Proceedings of the Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, 9-13 Sept. 1996, Paris, pp. 815-821.
- [2] William E. Lorenson, Harvey E. Cline, "Marching Cubes: A High Resolution 3D Surface Construction



**Рис. 9.** Отклонение объемного изображения от эталона для различных методов задания данных и уровней разбиения сетки, (а) - ЛИ, (б) - КЛИ, (в) - ГИ, уровень 0 (а-в), 1 (г-е), 2 (ж-и).

Algorithm", ACM Computer Graphics, Vol.21, No.4, July, 163-169, 1987.

### Авторы:

Александр Дядькин младший научный сотрудник  
Института автоматизации проектирования РАН.  
Адрес: Москва, 123056, ул. 2-ая Брестская 19/18  
Телефон: (095) 250-92-51  
E-mail: FlowVision@glas.apc.org

Алексей Гудзовский зав. сектором Института  
автоматизации проектирования РАН  
Адрес: Москва, 123056, ул. 2-ая Брестская 19/18  
Телефон: (095) 251-84-13  
E-mail: FlowVision@glas.apc.org

Alexander Dyadkin, Alexey Gudzovsky

### Methods of 3D Data Visualization on Cartesian Locally Refined Grids

Methods of scalar field visualization, given in centers of cells of adaptive Cartesian grid with local refinement are discussed. Local refinement can be used for improvement of the image of scalar field. The procedure of local refinement is accompanied by interpolation of data, during which there is the distortion of the information. The influence of grid local refinement and method of data interpolation on quality of the received image for various methods of scalar field visualization are discussed.

**Keywords:** volume visualization, locally refined grid, data interpolation.