

# Эффективная визуализация силовых линий с помощью неявных поверхностей

И.Н. Иновенков, А.В. Леоненко\*

## Аннотация

В статье обсуждается возможность использовать неявные поверхности для визуализации силовых линий векторного поля и применять иерархическое разбиение пространства для эффективной реализации предложенного метода, который является дальнейшим развитием метода потока шаров. Описывается использование различных способов построения изображения неявной поверхности применительно к данному методу и дается их сравнительная характеристика. Созданный метод иллюстрируется примерами визуализации эталонных векторных полей.

Ключевые слова: силовые линии, неявные поверхности, векторные поля, октантные деревья, триангуляция

## 1 Введение

Численное моделирование существенно нелинейных пространственных процессов приводит к необходимости анализировать нестационарные трехмерные векторные поля, структура которых априори неизвестна. Высокая точность вычислений, необходимая для таких исследований, приводит к увеличению размеров сеток, используемых при моделировании. С практической точки зрения это означает невозможность непосредственного анализа численных результатов, что и выводит на первый план графическое представление данных, т.е. визуализацию, как необходимый этап вычислительного эксперимента. Понимание этого факта в последнее десятилетие вызвало бурное развитие этого специального направления компьютерной графики.

Визуализация трехмерных векторных полей представляет наибольший интерес для современного исследователя, поскольку с развитием возможностей вычислительной техники, именно эти задачи имеют наибольшую практическую ценность. Однако визуализация трехмерных данных наталкивается на ряд принципиальных трудностей, связанных как с определенными недостатками воспроизводящей техники, так и с отсутствием у человека возможности непосредственно воспринимать пространственные данные. Для решения первой проблемы в настоящее время разрабатываются различные устройства для создания стереоизображений и объемных изображений. Для преодоления второй проблемы в рамках традиционной трехмерной компьютерной графики был разработан ряд методов типа перспективного проектирования и реалистичных моделей освещенности. Однако для изображения векторных данных вышеописанных подходов недостаточно, поскольку человек способен непосредственно воспринимать информацию о направлении лишь с помощью границ чего-либо, да и то с точностью до поворота на 180 градусов.

\*Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова. Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики

Предполагая, что для визуализации векторного поля необходимо изображать само поле, а не связанные с ним скалярные поля типа плотности [3] или различные параметрические объекты [2], методы трехмерной визуализации можно условно разделить на два класса. Первый класс использует пространственные объекты для создания границ. К этому классу относятся прежде всего методы, изображающие объекты, касательные в каком-то смысле к полю в точке их расположения. Такими объектами могут быть конические объекты, ось которых направлена по касательной, силовые линии (кривые, касательные к полю в каждой точке), силовые полосы и поверхности [7], размытые эллипсоиды, лежащие в плоскости, перпендикулярной градиенту поля, главная ось наибольшего радиуса которых ориентирована по касательной [4] и т.д. К достоинствам этих методов относятся их относительная алгоритмическая простота и возможность легкого восприятия получаемого изображения через физические аналоги поведения объектов в течениях, определяемых изображаемым полем. Второй класс содержит методы, создающие иллюзию границ без размещения реальных объектов, привязанных к области задания поля. В двумерном случае классическим примером такого подхода является метод свертки шума вдоль интегральных линий [5]. Преимуществами методов этого класса являются большое количество одновременно изображаемой информации и одинаковая эффективность для любых типов изображаемых полей.

Обсуждаемый в рамках данной статьи метод изображения с помощью неявных поверхностей относится к первому классу и примечателен тем с его помощью можно моделировать большинство эффектов, присущих методам этого типа. За подобную гибкость приходится платить производительностью, и поэтому особое внимание необходимо уделять способам ускорения вычислений.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. Во второй части формулируется метод изображения векторных полей с помощью неявных поверхностей. В третьей части излагается метод построения изображений неявной поверхности. Подробно обсуждается применение иерархического разбиения пространства для ускорения процесса вычисления дополнительной функции. В заключительной части описываются особенности программной реализации этого метода.

## 2 Визуализация с помощью неявных поверхностей

При непосредственном анализе векторного поля основное внимание уделяется изображению величины и направления векторов этого поля. Для этого в области его задания рассматриваются геометрические объекты, касательные к полю в точках своего расположения. Важным примером таких объектов являются силовые линии, т.е. линии, касательная к которой в каждой точке ( $\vec{r}$ ) совпадает по направлению с вектором поля  $\vec{W}(\vec{r})$ . Дифференциал радиуса-вектора вдоль такой кривой в каждой точке удо-

влетворяет уравнению  $d\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{r}}) = 0$ . Изображение этих линий может дать представление о структуре поля еще и потому, что они представляют собой траектории движения частиц в поле скоростей, равном заданному.

Силовая линия  $\bar{\mathbf{r}}(u)$ , проходящая через точку  $\bar{\mathbf{r}}_0$  может быть представлена как решение задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{du}\bar{\mathbf{r}}(u) = \bar{\mathbf{W}}(\bar{\mathbf{r}}(u)) \\ \bar{\mathbf{r}}(0) = \bar{\mathbf{r}}_0 \end{cases}$$

Численное интегрирование этой системы позволяет получить последовательность точек  $\bar{\mathbf{r}}_k$  лежащих на искомой кривой. При этом, сама кривая может быть аппроксимирована ломаной, получающейся путем соединения звеньями последовательных шагов интегрирования. Эта ломаная представляет собой трехмерный объект, который необходимо спроектировать на картинную плоскость для получения изображения. Поскольку операция проектирования вырождена, она может приводить к неоднозначности восприятия. Поэтому качественное изображение этой ломаной представляет определенную трудность.

Важнейшая информация о трехмерности изображенного на плоскости объекта получается за счет использования реалистичных моделей распространения света. Модель отражения Фонга является наиболее часто используемым компромиссом между сложностью вычислений и реализмом изображения. В рамках этой модели источники света предполагаются точечными, а наиболее важные компоненты, определяющие отражение, аппроксимируются простыми выражениями. В соответствии с этой моделью, для расчета освещенности требуется задание нормали. Для кривой, коразмерность которой равна двум, однозначное определение нормали не возможно. Решение этой проблемы лежит в изображении вместо кривой тонкой полигональной трубки, ячейки которой отображаются стандартными средствами.

К сожалению у этого метода есть ряд недостатков. Во-первых, при построении такой трубки необходимо специально следить за тем, чтобы она имела постоянную толщину и не перекручивалась. Во-вторых, если силовые линии будут расположены слишком близко, то их трубки будут пересекаться, что может вызвать дополнительную сложность при изображении. Наконец, этот метод может быть использован только для представления силовых линий, но не силовых поверхностей или полос.

Альтернативой построению таких трубок является использование неявных поверхностей, т.е. поверхностей заданных уравнением  $F(\bar{\mathbf{r}}) = 0$  [6]. С их помощью возможно изображать не только сами силовые линии, но и связанные с ними дополнительные параметры, например, величину поля или кручение.

Для построения искомой поверхности будем формировать функцию  $F(\bar{\mathbf{r}})$  как суперпозицию функций источников  $I_k(\bar{\mathbf{r}})$ :

$$F(\bar{\mathbf{r}}) = \sum_k I_k(\bar{\mathbf{r}}) - C \quad (1)$$

Для того, чтобы изобразить силовую линию необходимо равномерно распределить вдоль нее функции источников вида

$$I_k(\bar{\mathbf{r}}) = \begin{cases} \exp(-\alpha \|\bar{\mathbf{b}}\|), & \bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{a}} < 0 \\ \exp(-\alpha \chi(\bar{\mathbf{r}})), & \begin{cases} \bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{a}} \geq 0 \\ \bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{a}} \leq 0 \end{cases} \\ \exp(-\alpha \|\bar{\mathbf{c}}\|), & \bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{a}} > 0 \end{cases} \quad (2)$$

, где

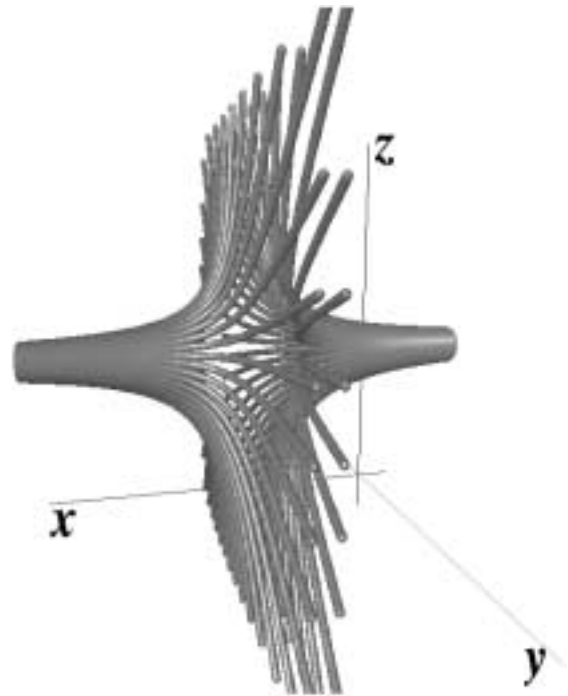


Рис. 1: Трубки. Поле  $F(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$

$$\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{r}}_{k+1} - \bar{\mathbf{r}}_k; \quad \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_k; \quad \bar{\mathbf{c}} = \bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_{k+1},$$

$$\chi(\bar{\mathbf{r}}) = \sqrt{\|\bar{\mathbf{b}}\|^2 - \frac{(\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{a}})^2}{\|\bar{\mathbf{a}}\|^2}}$$

- расстояние от точки  $(\bar{\mathbf{r}})$  до отрезка  $(\bar{\mathbf{r}}_k, \bar{\mathbf{r}}_{k+1})$ .

Поверхности уровня функции, представляющей собой суперпозицию таких источников, распределенных вдоль линии, выглядят как гладкая трубка фиксированной толщины. Скорость убывания экспоненты  $\alpha$  должна быть согласована с шагом интегрирования  $\|\bar{\mathbf{a}}\|$  и возрастать при его уменьшении. При фиксированном значении уровня  $C$  увеличение  $\alpha$  приводит к утоньшению трубок.

В качестве примера использования этого метода рассмотрим (рис. 1) изображение безвихревого векторного поля, описываемого скалярным потенциалом вида  $F(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$ . На этом изображении силовые линии поля представлены полигональными трубками постоянной толщины. Начальные точки, определяющие силовые линии, выбраны лежащими на границе расчетной области в окрестности оси OX. В местах сгущения силовых линий представляющие их трубки объединяются, визуальное образуя гладкую поверхность. Реалистичное освещение трубок позволяет правильно воспринимать их взаимное расположение и направление изгиба.

Для получения информации о направлении поля вдоль силовой линии можно использовать объекты, задаваемые неявными поверхностями, имеющими коническую форму. При этом они будут играть роль стрелок, указывающих точное направление поля в точке их расположения. Для получения таких объектов рассмотрим функции вида

$$I_A(\bar{\mathbf{r}}) = \sum_k J(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{m}}_k) = \sum_k \frac{M}{k^\beta} \exp(-\alpha \|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{m}}_k\|) \quad (3)$$

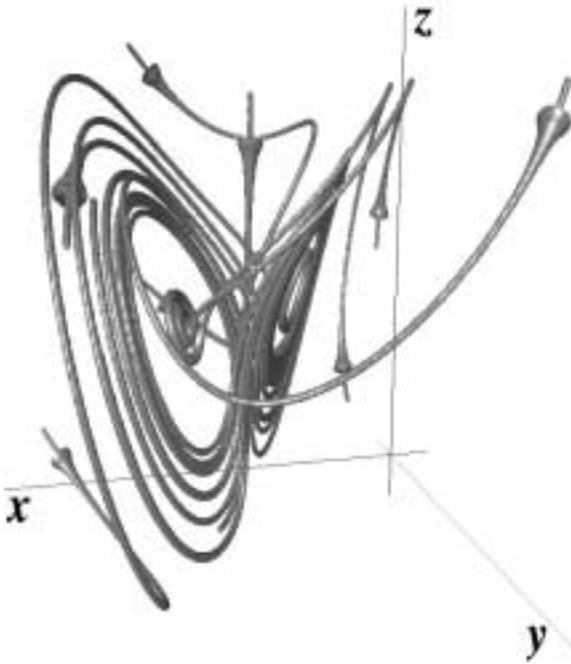


Рис. 2: Стрелки. Система Лоренца и странный аттрактор:  $dx/dt = -sx + sy$ ,  $dy/dt = rx - y - xz$ ,  $dz/dt = xy - bz$

Если ключевые точки  $\bar{m}_k$  расположить вдоль интересующего направления достаточно близко друг к другу (в зависимости от  $\alpha$ ) и согласовать показатель убывания  $\beta$  с константой  $M$ , то поверхности уровня функции  $I_A(\bar{r})$  будут иметь искомый конический вид. Таким образом, используя функции такого типа в качестве функции источников в (1) и распределяя ключевые точки вдоль силовой линии, можно указывать направление на этой линии. Пример использования этих функций представлен на рис. 2. На нем изображается знаменитая система Лоренца, имеющая странный аттрактор, структура которого хорошо передается на этом изображении. Из рисунка видно, что, начиная с некоторого момента, силовые линии начинают вращаться попеременно то вокруг одной, то вокруг другой особой точки. При этом использование “стрелок” позволяет лучше передать динамику поведения траекторий, указывая на то, что силовые линии постоянно меняют направление вращения и немного раскручиваются в сторону от особой точки, прежде чем перейти на орбиту другой точки.

Преимуществом описываемого метода является возможность визуализировать дополнительные характеристики силовой линии, которые невозможно передать изображая линию в виде ломанной. Одной из таких характеристик является кручение, т.е. угловая скорость вращения бинормали вокруг мгновенного положения касательной. На рис. 3 изображены три замкнутые силовые линии, имеющие одинаковую форму и разное кручение. При этом, на рисунке отчетливо видно, что величина кручения возрастает в направлении оси OZ. В то же время, изображенные с помощью ломаных, эти линии не отличались бы по форме и представляли бы собой окружности.

Для получения этого эффекта достаточно рассмотреть функции источника в виде

$$I_B(\bar{r}) = \exp(-\alpha \|\bar{r} - \bar{r}_k + \delta \bar{n}_b\|), \quad (4)$$

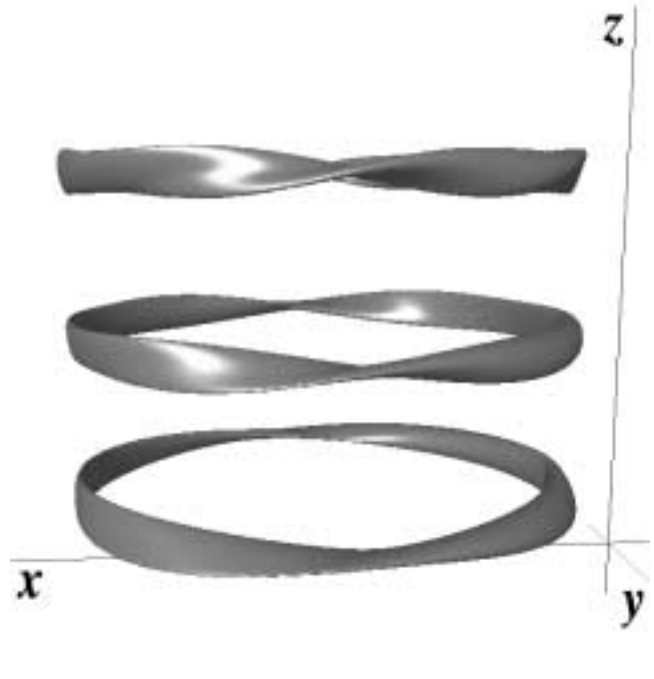


Рис. 3: Сжатые эллипсоиды. Изображение различного кручения при одинаковой траектории

где  $\bar{n}_b$  - бинормаль в точке  $\bar{r}_k$ ,  $\delta$  - коэффициент, соответствующий сжатию поверхности уровня в направлении бинормали.

Изоповерхности функции, представляющей собой суперпозицию таких источников, распределенных вдоль силовой линии имеют вид полосы. При относительно большом  $\delta$  плоская часть этой полосы почти “перпендикулярна” бинормали.

Как было показано, с помощью изменения формы изоповерхности отдельных источников можно отображать различные параметры, например направление силовой линии или ее кручение. Кроме того, неравномерно распределяя источники вдоль силовой линии можно передавать величину дивергенции. Дополнительная скалярная величина, например температура, в точке  $\bar{r}_k$ , может быть использована для задания множителя, определяющего относительный вклад источника, расположенного в  $\bar{r}_k$ , в общую функцию. Однако излишне активное применение этих методов может привести к неправильной визуальной передаче формы самой линии. В связи с этим, важно иметь другие способы передачи соответствующих величин. Таким дополнительным методом может стать использование цвета для отображения дополнительной информации. Наиболее естественным представляется применение цветокодировки для изображения величины поля.

Как показывает этот раздел, использование неявных поверхностей для визуализации структуры векторного поля является мощным и гибким средством. Однако само изображение неявной поверхности может представлять определенную трудность.

### 3 Изображение неявных поверхностей

Для получения изображения поверхности, заданной уравнением  $F(x, y, z) = 0$ , наиболее часто используют

ся методы построения кусочно линейной аппроксимации данной поверхности путем разбиения всей области ее задания на элементарные подобласти, внутри которых поведение поля предполагается линейным. Классическим представителем этого направления является алгоритм “марширующих кубов”. Как следует из названия, в качестве подобластей разбиения в данном методе используются кубы с внутренней трилинейной интерполяцией.

Поскольку при уменьшении размера подобластей разбиения, их число растет обратно-пропорционально третьей степени их диаметра, а не второй, как должно быть в идеале, важную роль играют алгоритмы, позволяющие сократить число проверяемых ячеек до минимума. В связи с этим в работе [1] предложен алгоритм позволяющий практически исключить из рассмотрения ненужные ячейки.

### 3.1 Метод распространяющихся кубов

Этот алгоритм основан на идее последовательного распространения поверхности с обрабатываемой ячейки на соседние с ней. В качестве множества начальных ячеек предлагается брать минимальное множество ячеек, содержащих в себе силовые линии, а также линию, соединяющую все начальные точки и точку на границе.

Для того, чтобы это множество действительно имело непустое пересечение со всеми связанными компонентами неявной поверхности необходимо, чтобы оно содержало все дуги какого либо связанного графа максимумов  $F(x, y, z)$ . Учитывая вид отдельных компонент  $I(\bar{\Gamma})$  можно утверждать, что это условие выполнено, поскольку максимумы каждой из компонент совпадают с точками  $\bar{\Gamma}_k$ , т.е. лежат на силовых линиях, а сами эти компоненты вогнуты вверх.

Для сравнения эффективности этого метода и метода “марширующих кубов” (MC) необходимо оценить отношение количества посещаемых ячеек к количеству ячеек, содержащих поверхность, при росте их общего числа. Результаты этого сравнения изображены на рис. 4, на котором ось X соответствует кубическому корню из числа ячеек, а ось Y - искомому отношению. Из представленных на этом рисунке графиков видно, что эффективность метода “распространяющихся кубов” (SC) близка к единице, в то время как эффективность метода MC с ростом числа ячеек падает практически до нуля. На эффективность метода MC также сказывается убывание относительной доли начальных ячеек при росте их общего числа. Из представленных графиков следует, что с точки зрения выбранного критерия этот метод является почти оптимальным.

Особое внимание необходимо уделить вопросу о вычислении скалярной функции, определяющей неявную поверхность. Для решения уравнения  $F(x, y, z) = 0$  в предположении линейности  $F(x, y, z)$  внутри кубической ячейки, требуется вычисление этой функции в вершинах куба. Учитывая то, что функция  $F(x, y, z)$  представляет собой суперпозицию большого числа источников, вычисление значений каждого из которых требует расчета расстояния между точками, можно предполагать, что вычисление значения  $F(x, y, z)$  и станет самой трудоемкой операцией.

### 3.2 Вычисление скалярной функции

В случае если значения каждой из функций источников  $I(\bar{\Gamma})$  существенно отличны от нуля лишь в небольшой по-

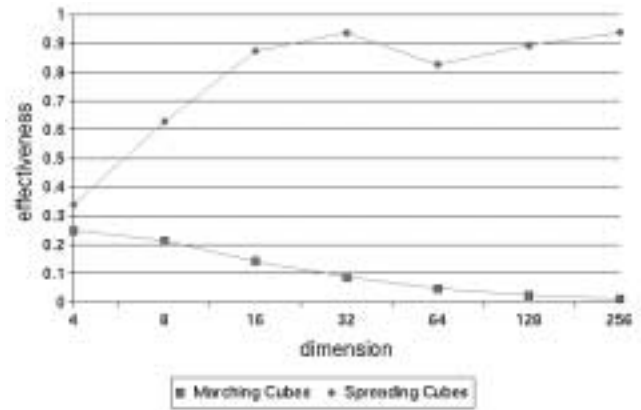


Рис. 4: Сравнение эффективности методов по количеству посещаемых ячеек

добласти  $\Omega_{im}[I(\bar{\Gamma})]$  (область влияния источника), вычисление  $F(x, y, z)$  можно организовать следующим образом. Функция вычисляется в узлах кубической сетки, определяющей разбиение области на ячейки. Для этой цели заводится массив, элементы которого обнуляются. Затем каждая функция источника вычисляется лишь для тех узлов, которые попали в область ее влияния, и полученные значения прибавляются к соответствующему элементу массива. В результате, после обработки всех функций источников, указанный массив будет содержать значения функции  $F(x, y, z)$  в узлах сетки. Если предположить, что область влияния каждого источника составляет 0.1% от общего объема, то количество вычислений значения функции  $I(\bar{\Gamma})$  можно оценить как

$$\bar{N}_A = \frac{N^3}{1000} * N_I$$

, где  $N_I$  - количество функций источников,  $N$  - размер сетки.

Другую оценку этой величины можно получить следующим образом. Количество ячеек содержащих изоповерхность оценивается как  $N_E = k_E N^2$ , где  $k_E$  - константа. Если предполагать, что поверхность распространяется с одной ячейки на другую, то в среднем на каждую новую ячейку необходимо по четыре вычисления функции  $F(x, y, z)$ . Кроме того, можно предположить, что средний коэффициент пересечения областей влияния равен  $k_A \leq N_I$ . Тогда искомая оценка будет иметь вид

$$\tilde{N}_A = 4 * k_A k_E N^2$$

Исходя из этих оценок можно сделать следующий вывод: адаптивное вычисление скалярной функции  $F(x, y, z)$  является эффективным по производительности если

$$k_A k_E < \frac{N N_I}{4000} \quad (5)$$

В наихудшем случае  $k_A = N_I$  и из критерия (5) следует, что адаптивное вычисление функции будет эффективным только если  $N > 4000 * k_E$ . Поскольку хорошей практической оценкой для  $k_E$  является оценка  $\hat{k}_E = 10$ , то в наихудшем случае вычисление по адаптивной схеме будет эффективно лишь при  $N \geq 40000$ .

Тем не менее, можно утверждать, что адаптивное вычисление функции  $F(x, y, z)$  более эффективно чем априорное, поскольку на практике  $k_A \ll N_I$ . В связи с этим

важную роль играет такая организация вычисления при которой реальная оценка  $\hat{k}_A \simeq k_A$ .

### 3.3 Применение иерархического разбиения

Для получения точной оценки  $k_A$  необходимо определить отображение  $\tilde{\Phi}(\bar{\mathbf{r}})$ , которое каждой точке области  $\Omega$  (область задания функции  $F(x, y, z)$ ) ставит в соответствие конечное множество функций источников  $\{I_{k_n}(\bar{\mathbf{r}})\}$  имеющих ненулевое влияние в этой точке:

$$\tilde{\Phi} : \bar{\mathbf{r}} \rightarrow \{I_{k_n}(\bar{\mathbf{r}}) : r \in \Omega_{im}(I_{k_n}(\bar{\mathbf{r}}))\} \quad (6)$$

В этом случае  $k_A$  оценивается как

$$k_A = \frac{[L] \int_{\Omega} |\tilde{\Phi}(\bar{\mathbf{r}})| d\bar{\mathbf{r}}}{[L] \int_{\Omega} d\bar{\mathbf{r}}} \leq \max_{\bar{\mathbf{r}} \in \Omega} |\tilde{\Phi}(\bar{\mathbf{r}})| \quad (7)$$

Поскольку отображение  $\tilde{\Phi}(\bar{\mathbf{r}})$  в общем случае неизвестно, необходимо его оценить, т.е. построить такое отображение  $\hat{\Phi}_I(r)$  точек области  $\Omega$  в множество конечных подмножеств  $\{I_k(\bar{\mathbf{r}})\}$ , что  $\hat{\Phi}(\bar{\mathbf{r}}) \supset \tilde{\Phi}(\bar{\mathbf{r}})$ . Тривиальная оценка соответствует отображению каждой точки в множество всех функций источников; при этом  $k_A = N_I$ .

Идея использования иерархического разбиения пространства для вычисления  $F(x, y, z)$  состоит в кластеризации функций источников в зависимости от их расположения. Для этого область  $\Omega$  разбивается на подобласти  $\Omega_m^j$  так, что:

$$\begin{aligned} \Omega_{m_1}^j \cap \Omega_{m_2}^j &= \emptyset, \quad m_1 \neq m_2 \\ \forall j, m \exists m_1 : \Omega_{m_1}^{j-1} &\supset \Omega_m^j \\ \Omega^0 &= \Omega \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим отображение  $\Psi$  сопоставляющее функции источника  $I_k(\bar{\mathbf{r}})$  подобласть  $\Psi(I) = \Omega_{m_0}^{j_0}$ . При этом отображении каждой функции  $I$  соответствует множество вложенных подобластей

$$\bar{\Psi}[I] = \{\Omega_m^j \subset \Omega_{m_0}^{j_0} = \Psi(I), j < j_0\}$$

и наоборот, каждой области  $\Omega_m^j$  соответствует множество функций

$$I[\Omega_m^j] = \{I \in \{I_k(\bar{\mathbf{r}})\} : \Omega_m^j \in \bar{\Psi}[I]\}$$

Рассмотрим отображение  $\hat{\Phi}(\bar{\mathbf{r}})$ , которое каждой точке  $\bar{\mathbf{r}} \in \Omega$  сопоставляет конечное множество пар индексов  $\{j_k, m_k\}$  таким образом, что

$$\hat{\Phi}(\bar{\mathbf{r}}) = \bigcup_{\{j, m\} \in \Phi(\bar{\mathbf{r}})} I[\Omega_m^j] \supset \{I_k(\bar{\mathbf{r}}) : \bar{\mathbf{r}} \in \Omega_{im}(I_k(\bar{\mathbf{r}}))\} \quad (9)$$

Это отображение и является искомой оценкой. Для него аналогично (7) можно ввести  $\hat{k}_A$ . Отношение  $k_A/\hat{k}_A$  является одним из критериев оценки эффективности. Однако с практической точки зрения удобнее рассматривать следующие два критерия:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1 - \frac{\hat{k}_A}{N_I} = 1 - \frac{E_b}{E_f N_I}, \\ \xi_2 &= \frac{E_w}{E_b}, \end{aligned}$$

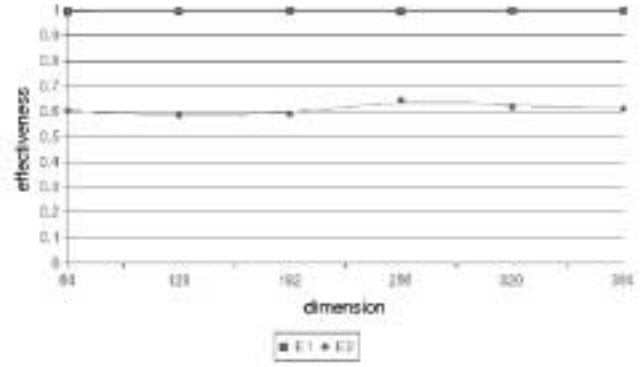


Рис. 5: Поведение критериев эффективности при росте числа ячеек  $N$

где  $E_b$  - количество вычисленных значений  $I(\bar{\mathbf{r}})$ ,  $E_w$  - количество значений  $I(\bar{\mathbf{r}})$ , не повлиявших на величину  $F(x, y, z)$ ,  $E_f$  - количество вычисленных значений функции  $F(x, y, z)$ . Первый критерий характеризует выигрыш от использования более сложной функции  $\hat{\Phi}(r)$  относительно тривиальной. Второй - неэффективность по сравнению с оптимальным методом.

В качестве примера построения  $\{\Omega_m^j\}$ ,  $\Psi$ ,  $\hat{\Phi}$  опишем метод, использованный авторами статьи и основанный на алгоритме октантных деревьев. Область  $\Omega$  изоморфно отображалась на единичный куб  $\Omega$ . Предполагалось, что для всех  $I_k(\bar{\mathbf{r}})$  характерный размер области влияния можно оценить как:  $diam(\Omega_{im}[I_k(\bar{\mathbf{r}})]) \leq 2\epsilon$ . В качестве начального приближения  $\{\Omega_m^j\}_0$  иерархии подразделения бралось  $\{\Omega_0^0 = \Omega_e\}$ . Отображение  $\Psi$  строилось в виде

$$\Psi : I(r, r_k) \rightarrow \arg \max_{\{\Omega_m^j : r_k \in \Omega_m^j\}} j$$

Затем производилась минимизация критерия

$$\eta = \left| \max_{\bar{\Omega} \in \{\Omega_m^j\}_n} |\{I \in \{I_k(\bar{\mathbf{r}})\} : \bar{\Omega} \in \Psi[I]\}| - \eta_0 \right|$$

путем построения новой иерархии  $\{\Omega_m^j\}_{n+1}$  за счет рекурсивного подразделения тех областей  $\{\Omega_m^j\}_n$ , которым сопоставлялось более чем  $\eta_0$  функций, на восемь подобластей с увеличенным  $j$ . В результате такой минимизации строилось октантное дерево, узлам которого соответствовали области разбиения  $\Omega$ . Листья этого дерева хранили информацию об источниках, приписанных к ним отображением  $\Psi$ .

Отображение  $\hat{\Phi}$  строилось по следующему алгоритму. В начальный момент времени в список узлов заносился корневой узел, а затем, пока этот список был не пуст, из него последовательно извлекались верхние узлы. Если извлеченный узел являлся листом, то приписанные к нему функции считались принадлежащими  $\hat{\Phi}(\bar{\mathbf{r}})$ . Если же он не являлся листом, то в список узлов заносились его "дети", удаленные от точки  $\bar{\mathbf{r}}$  не более чем на  $\epsilon$ .

Поведение критериев эффективности для данного алгоритма представлено на рис. 5. Графики построены для изменяющегося числа ячеек  $N$ . Аналогичное поведение демонстрируется и при изменении числа источников  $N_I$

при условии, что оно не влечет изменения их относительной плотности. Из графика  $\xi_1$  видно, что использование  $\widehat{F}(\overline{\mathbf{F}})$  для расчета функции  $F(x, y, z)$  оправдано, поскольку приводит к огромному сокращению числа вычислений  $I_k(\overline{\mathbf{F}})$ . При этом слабая зависимость этого критерия от роста  $N$  и  $N_I$  демонстрирует достаточную эффективность данного подхода. Поведение графика  $\xi_2$  показывает, что описанный метод приблизительно в три раза менее эффективен, чем оптимальный. Таким образом применение иерархического разбиения пространства позволяет эффективно реализовать процедуру адаптивного вычисления  $F(x, y, z)$ . Дополнительные вычисления, связанные с созданием структуры октантных деревьев и нерекурсивным поиском по этому дереву, остаются относительно невелики, поскольку они не требуют сложных арифметических вычислений. Если предположить, что для  $\widehat{k}_A$  верна оценка  $\widehat{k}_A = 25$ , то для разрешения  $N = 256$  уже при  $N_I \geq 3902$  адаптивное вычисление функции становится более эффективным, чем априорное.

## 4 Заключение

Изложенный в данной работе метод визуализации векторных полей с помощью неявных поверхностей специального вида был реализован на программно-аппаратной платформе Celeron-375/128/Linux 2.2.14/Mesa3D 3.1. Вычисления организованы следующим образом. Для заданного набора начальных точек производилась трассировка силовых линий в положительном направлении. С этой целью используется метод Рунге-Кутты 4(3) с адаптивной коррекцией шага интегрирования. В список проверяемых ячеек заносились все ячейки, содержащие силовые линии, а также связывающую их линию. Для ускорения вычисления  $F(x, y, z)$ , по описанному выше алгоритму строилось октантное дерево, в которое заносились, размещенные вдоль силовых линий источники вида (2), (3) или (4). Пока список проверяемых ячеек не становился пуст, из него извлекались ячейки, и, если они имели непустое пересечение с изоповерхностью, то в список добавлялись их соседи, которые еще не были обработаны. Для определения того, какая ячейка уже была обработана, а какая нет, в памяти создавался битовый массив. При этом каждой ячейке однозначно сопоставлялся бит, который равнялся нулю, если ячейка была не обработана, и единице - в противном случае. Учитывая то, что ячейка, соседняя с данной, имеет четыре общие с ней вершины, для которых значения функции  $F(x, y, z)$  уже вычислены, при занесении ее в список проверяемых ячеек, производилось всего четыре новых вычисления дополнительной функции. В конечном итоге, получаемая триангуляция отображалась с помощью средств OpenGL.

Использование адаптивного метода вычисления дополнительной функции позволило не только ускорить процесс визуализации, но и существенно сократить объем требуемой памяти. Это в свою очередь позволило аккуратно изображать поверхности с большой кривизной, используя более плотные сетки. В результате для получения изображения, соответствующего разрешению сетки  $256^3$ , при среднем количестве силовых линий ( $\sim 30$ ) необходимо затратить от 0.5 до 2-х минут в зависимости от толщины трубок.

Предложенный метод был использован для получения анимации процесса образования токовых слоев в высокотемпературной плазме.

## Список литературы

- [1] Е.Ю.Ечкина, И.Н.Иновенков, А.В.Леоненко, "Метод создания анимации образования токовых слоев", Труды конференции Графикон-99, стр. 34- 38, 1999
- [2] Andrew J.Hanson, Hui Ma, "Visualizing flow with quaternion frames", Visualization 94 Conf. Proc., pp. 108-115, 1994
- [3] Kwan-Lui Ma, Philip J. Smith, "Virtual smoke: an interactive 3d flow visualization technique", Visualization 92 Conf. Proc., pp. 46-52, 1992
- [4] J. J. van Wijk, "Rendering surface-particles", Visualization 92 Conf. Proc., pp. 54-61, 1992
- [5] D. Stalling, H. Hege, "Fast and resolution independent line integral convolution", ACM Siggraph 1995, pp. 249-256, 1995
- [6] M. Brill, W. Djatschin, "Streamball techniques for flow visualization", Visualization 94 Conf. Proc., pp. 225-231, 1994
- [7] J. Hultquist, "Constructing stream surfaces in steady 3D vector fields", Visualization 92 Conf. Proc., pp. 171-178, 1992

## Авторы

Иновенков Игорь Николаевич, доцент кафедры автоматизации научных исследований МГУ им. М.В. Ломоносова (inov@cs.msu.su)

Леоненко Алексей Викторович, аспирант кафедры автоматизации научных исследований МГУ им. М.В. Ломоносова (lalex@cs.msu.su)

## Efficient streamline visualization by implicit surfaces

I.N.Inovenkov, A.V. Leonenko

MSU, Moscow

### Abstract

An application of implicit surfaces for flow visualization are discussed in this paper and a new method based on streamball technique are introduced. Proposed method are illustrated by images of classic fields. Finally, efficient computation of additional scalar function are provided by utilization of hierarchical space subdivision methods.

Keywords Flow visualization, streamlines, implicit surfaces, triangulation, vector fields, octrees