

Критические точки топографических поверхностей.

Д. Ф. Кучкарова канд. техн. наук.
(Бухарский государственный университет, Узбекистан)

Abstracts

In the article is offered way to identifications a type of critical spots on topographical surfaces. Critical spot Identification is produced on the grounds of categorizations of tops of topographical surface by the offered author.

При решении задач на топографической поверхности, представленной как $T_1 - T_2 - T_3 - T_4$ – пространство и топологическое многообразие, погруженное в евклидово пространство R^3 [1, 2], практический интерес представляют критические точки. Понятие критической точки связано с понятием ранга отображения в некоторой точке x_0 . Он равен размерности подпространства в R^m – образа R^n при линейном отображении $Dx_0 f$ т. к. ранг матрицы не может превысить число строк или столбцов, то $\text{rank } x_0 f \leq \min(n, m)$. Точки, в которых $\text{rank } x_0 f < \min(n, m)$ являются критическими. В [2] показано, что множество критических точек на топографической поверхности $f(x) \in R^n$ имеет ненулевую меру Лебега.

В практических целях важно идентифицировать тип критической точки.

В случае, когда топографическая поверхность задана дискретной регулярной сетью исходных данных идентификацию критических точек можно произвести путём дифференцирования матрицы:

$$z = \begin{bmatrix} z_{11} z_{12} \dots z_{1n} \\ z_{21} z_{22} \dots z_{2n} \\ \dots \dots \dots \dots \\ z_{m1} z_{m2} \dots z_{mn} \end{bmatrix} \quad (1)$$

где z_{ij} - значения высот исходных точек, инцидентных некоторой ячейке. Для каждого элемента матрицы z_{ij} (неизменными остаются крайние правый и левый столбцы, верхняя и нижняя строки – граница области) вычисляются вторые частные и смешанная производные

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{ij} = \frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{\Delta x_1 \Delta x_2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{ij} = \frac{z_{i+1,j} - 2z_{i,j} + z_{i-1,j}}{\Delta y_1 \Delta y_2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{ij} = \frac{z_{i+1,j+1} - z_{i+1,j-1} - z_{i-1,j+1} + z_{i-1,j-1}}{4(\Delta x_1 + \Delta x_2)(\Delta y_1 + \Delta y_2)},$$

Определяются гессиан A и квадратичная форма (Ax, y)

$$A = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{ij} & \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{ij} \\ \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{ij} & \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{ij} \end{vmatrix}$$

характер которых выявляет тип исследуемой вершины.

Возможны следующие случаи:

$$1) \quad A = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{ij} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{ij} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(Ax, y) = -\lambda x^2 - \lambda'' y^2$$

Вершина z_{ij} является невырожденной критической точкой – вершиной типа α_1 (рис. 1) первого порядка:

$$2) \quad A = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{ij} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{ij} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(Ax, y) = \lambda x^2 + \lambda'' y^2$$

Вершина z_{ij} является невырожденной критической точкой - вершиной типа α_2 (рис. 2) первого порядка

$$3) A = \begin{vmatrix} + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{ij} & 0 \\ 0 & - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{ij} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(Ax, y) = \lambda x^2 - \lambda y^2$$

Вершина z_{ij} является невырожденной критической точкой – вершиной типа γ (рис. 3) первого порядка

$$4) A = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad A(x,y)=0$$

Вершина z_{ij} является вырожденной критической точкой – вершиной типа $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ (рис. 4)

$$5) A = \begin{vmatrix} \pm \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right)_{ij} & \pm \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{ij} \\ \pm \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right)_{ij} & \pm \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)_{ij} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(Ax, y) = \pm \lambda x^2 \pm \lambda y^2 \pm \lambda xy^2$$

Вершина z_{ij} является не критической точкой типа $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ с комплексом точек второго порядка включенных в максимальную окрестность вершины z_{ij} (рис. 5)

Учитывая высокую степень точности топографических съемок, которая составляет 0.01 м и с помощью которой может быть представлен любой участок местности с разностью высот 1300м можно утверждать что анализ матрицы (1) дает достоверную картину распределения типов вершин в каждой ячейке.

Литература

1. Кучкарова Д.Ф. Геометрические модели топографических поверхностей - Начертательная геометрия инженерная и компьютерная графика Нижний Новгород ННГАСУ вып.4 1999 с.55-60
2. Кучкарова Д.Ф. Топографические поверхности как топологические многообразия. - Начертательная геометрия инженерная и компьютерная графика Нижний Новгород ННГАСУ вып.4 с. 60- 62

В статье предлагается способ идентификации типа критических точек на топографической поверхности. Идентификация критических точек производится на основании классификации вершин топографической поверхности предложенной автором.

Information On the author.

Kuchkarova Dilorom, Candidate of technical sciences, assistant professor of pulpit of descriptive geometry and graphs of the university of Bukhara.

Home address: 705000, Bukhara, Uzbekistan, str. Navoiy, 47, Tel.: 224-38-16.

Official address: 705018, Bukhara, Uzbekistan, str. Ikbol, 11, University of Bukhara. Tel. 223-15-95

Информация об авторе.

Кучкарова Диларом Файзуллаевна, кандидат технических наук, доцент кафедры начертательной геометрии и черчения Бухарского госуниверситета.

Домашний адрес: 705000, г. Бухара, Узбекистан, ул. Навои, 47, дом. тел.: 224-38-16.

Служебный адрес: 705018, г. Бухара, Узбекистан, ул. Икбола, 11, Бухарский госуниверситет, раб. тел. 223-15-95

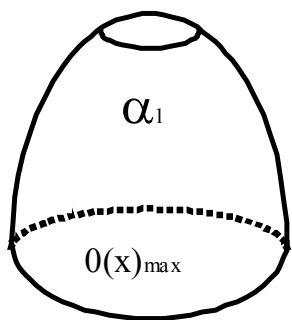


Рис. 1

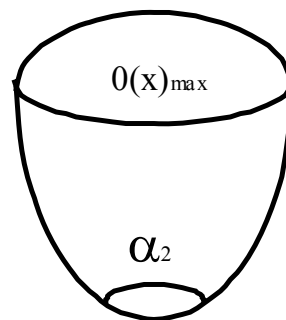


Рис. 2

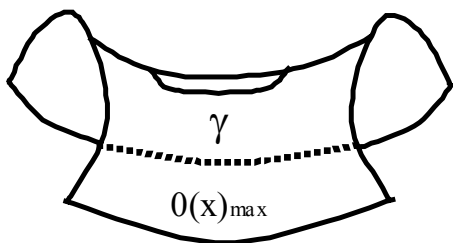
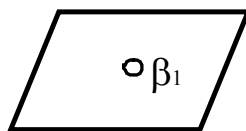
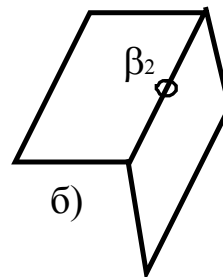


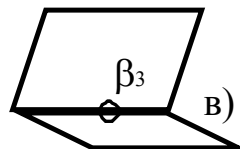
Рис. 3



а)

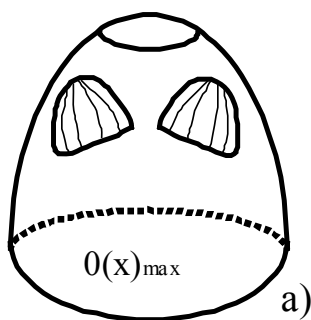


б)

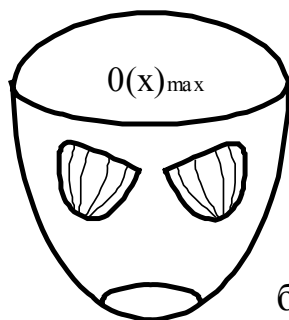


в)

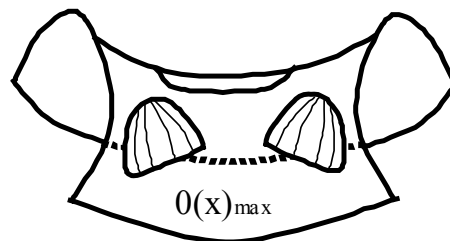
Рис. 4



а)



б)



в)

Рис. 5