ПОСТРОЕНИЕ ОСТОВА ЗАМКНУТОГО КОНТУРА МЕТОДОМ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ

В.Н.Кучуганов, д.т.н., профессор, ИжГТУ, г. Ижевск, тел. (3412) 58-89-10,
E-mail: **kvn@cd.istu.udm.ru**.

Задача построения остова (скелета) замкнутого контура возникает в процессе триангуляции произвольных (невыпуклых) плоских фигур при тепловых, прочностных и прочих расчетах методами конечных элементов. В настоящее время триангуляция широко используется для анимации и рендеринга трехмерных геометрических моделей. В качестве других приложений можно назвать сокращение пространства параметров при анализе и распознавании зрительных образов.

Обычно задача решается в полуавтоматическом диалоге с пользователем. Наиболее известные математические решения, например, /1/, используют "волновые" методы последовательного приближения от краев фигуры. Ниже предлагается геометрическое решение, названное здесь методом золотых сечений.

Определение 1. ***Остов замкнутого контура*** (skeleton) – это геометрическое место точек, равноудаленных от ближайших точек контура.

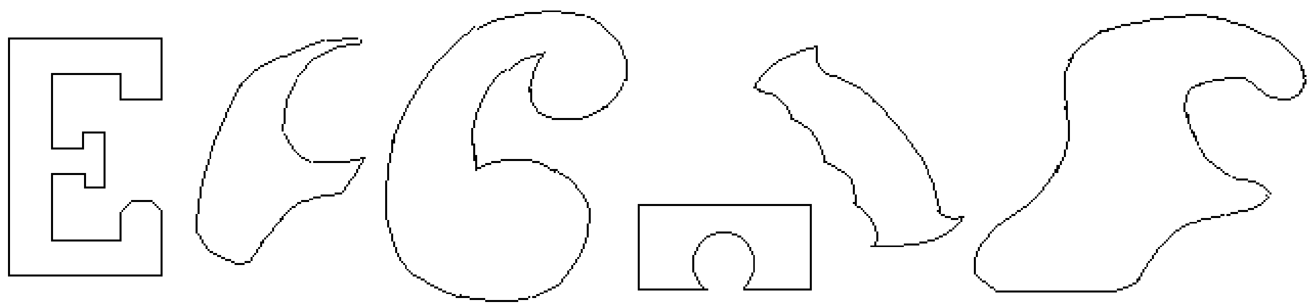


Рис. 1

Определение 2. ***Биссектрическая дуга*** (биссектриса) – это геометрическое место точек, равноудаленных от двух элементов контура.

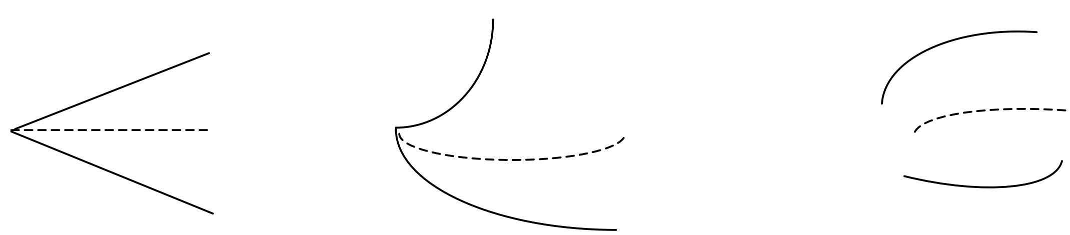


Рис. 2

Очевидно, биссектрические дуги можно решать аналитически, но нас интересует метод, который бы легко ложился на программу.

Определение 3. Назовем ***углом перехода (переходом) V'*** от некоторого элемента контура к соседнему элементу угол поворота вектора касательной к контуру вокруг конца этого элемента (рис. 3).

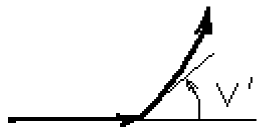


Рис. 3

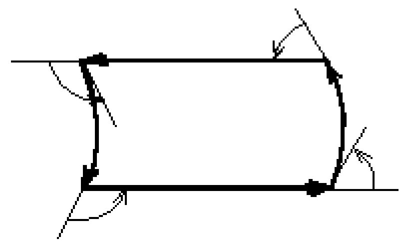
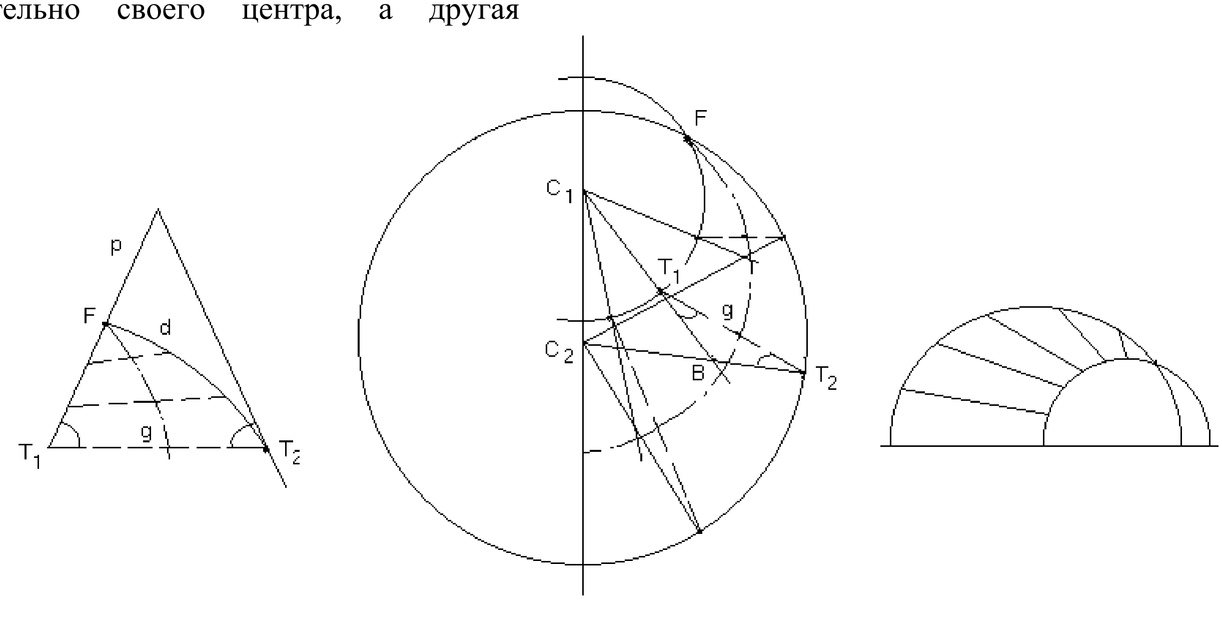


Рис. 4

Определение 4. Назовем ***положительным обходом замкнутого контура*** такой порядок обхода его элементов, при котором суммарный поворот вектора касательной к контуру $\sum_{i=1}^{n} V_i' = +2\pi$ (рис. 4).

Очевидно, при положительном обходе ***выпуклого контура*** все переходы положительны, т.е. вектор касательной на концах элементов всегда осуществляет поворот ***против часовой стрелки***. Если следовать положительному обходу, указанному на рис. 4, то заметим, что одна из дуг (выпуклая) идет против часовой стрелки относительно своего центра, а другая (вогнутая) – по часовой. При дальнейших построениях будем отличать их знаком у радиуса: в первом случае $r > 0$, во втором – $r < 0$.

Определение 5. Назовем ***золотым сечением прямой p и дуги d в точке T_1*** такую прямую g, проходящую через T_1, которая образует равные углы с p и касательной к d в точке T_2 своего пересечения с d (рис. 5а), и ***золотым сечением дуг d_1, d_2 в точке T_1*** такую прямую g, проходящую через T_1, которая образует равные углы с касательными к d_1 и d_2 в точках T_1 и T_2 соответственно (рис. 5б).



а) б) в)

Рис. 5

В случае с двумя дугами вершина равностороннего треугольника T_1BT_2 принадлежит биссектрической дуге (рис. 5б), поскольку отрезки T_1B и T_2B лежат на соответствующих радиусах. В случае *p-d* биссектрическая дуга проходит через середину сечения *g*. Кривую, близкую к биссектрической, можно получить путем равномерного разбиения отрезков T_1F и T_2F (рис. 5а) с помощью золотых сечений.

Для сравнения на рис. 5в показан обычный способ, когда боковые дуги просто разбиты с одинаковым угловым шагом.

Теорема 1. Для произвольной точки T_1 на прямой *p* существуют две ответные точки T_2 и T_2' на окружности такие, что T_1T_2 и T_1T_2' образуют золотое сечение, но только через одну из них проходит выпуклый участок контура.

Доказательство.

Пусть имеется произвольная прямая *p*, проходящая через точку T_1 и окружность с центром C_2 (рис. 6а). Требуется найти точку T_2 на окружности, удовлетворяющую Определению 4 положительного обхода контура, такую, что отрезок T_1T_2 образует золотое сечение прямой и дуги.

1.Опустим перпендикуляр из C_2 на *p*. Получим точку C_1 их пересечения.

2.Из точки T_1 проведем прямую *p′* параллельно C_1C_2.

3.Выберем на окружности точку T_2 таким образом, чтобы точка пересечения *A* касательной с прямой *p* находилась на одинаковом расстоянии от точек T_1 и T_2. Получим равнобедренный треугольник T_1AT_2, основание T_1T_2 которого образует равные углы с прямой *p* и касательной к окружности в точке T_2, т.е. удовлетворяет Определению 5.

4.Из точки А можно провести еще одну и только одну касательную, которая будет касаться окружности в точке T_2', причем $AT_2' = AT_2 = AT_1$, т.е. T_1T_2' также удовлетворяет Определению 5.

5.Из точки *B* пересечения радиуса C_2T_2 с прямой *p′* опустим перпендикуляр на C_1C_2. Получим точку *D* и треугольник C_2BD. Аналогичным образом получается треугольник $C_2B'D'$.

6.Примем расстояние $C_2C_1 = h;$ $T_1C_1 = s;$ $T_1B_1 = x;$ $T_1B' = x';$ радиус окружности *r*.

В прямоугольном треугольнике C_2BD (рис. 6а)

$$(BD)^2 + (C_1C_2 - x)^2 = (C_2T_2 + x)^2$$

или $$s^2 + (h - x)^2 = (x + r)^2. \qquad (1)$$

Отсюда $s^2 + h^2 - 2hx + x^2 = r^2 + 2rx + x^2$;

$$s^2 + h^2 - r^2 = 2(h + r)x;$$

$$x = \frac{s^2 + h^2 - r^2}{2(h+r)}; \quad \sin\alpha = \frac{s}{r+x}.$$

В то же время, в треугольнике $C_2B'D'$ сторона $C_2D' = -h + x'$, а гипотенуза $C_2B' = x' - r$.

7.Рассмотрим ситуации, когда *p* проходит вне окружности, т.е. $h > r$ (рис. 6а, 6б).

В обоих треугольниках катет, лежащий на прямой C_2C_1, принимает значения $(h - x)^2$, следовательно, выбор знака *h* и *x* не влияет на результат.

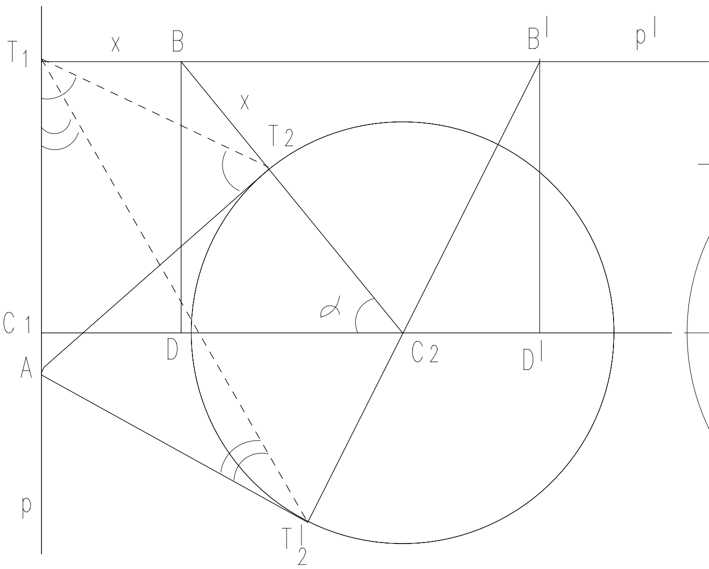
Что касается гипотенузы, которая принимает значения $x + r$ или $x - r$, вернемся к Определению 4 положительного обхода контура.

Из геометрических построений следует:

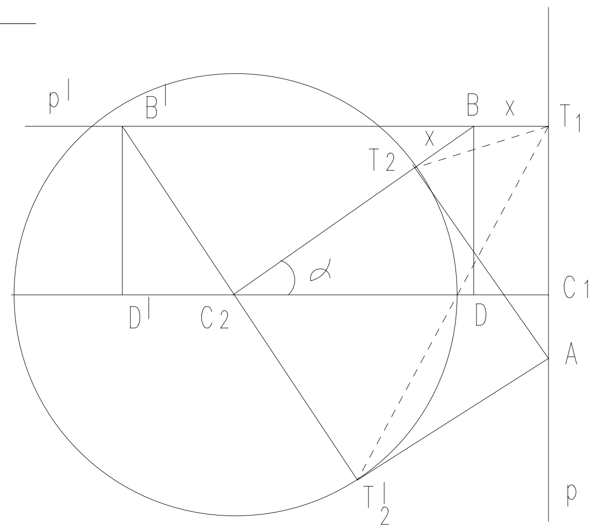
если при положительном обходе контура отрезок дуги с центром C_2 идет против часовой стрелки, то только в случае острого угла $T_1B'T_2$ точка T_1 лежит слева по ходу контура, для получения острого угла величина *x* должна вычисляться по формуле

$$x = C_2B + r. \qquad (2)$$

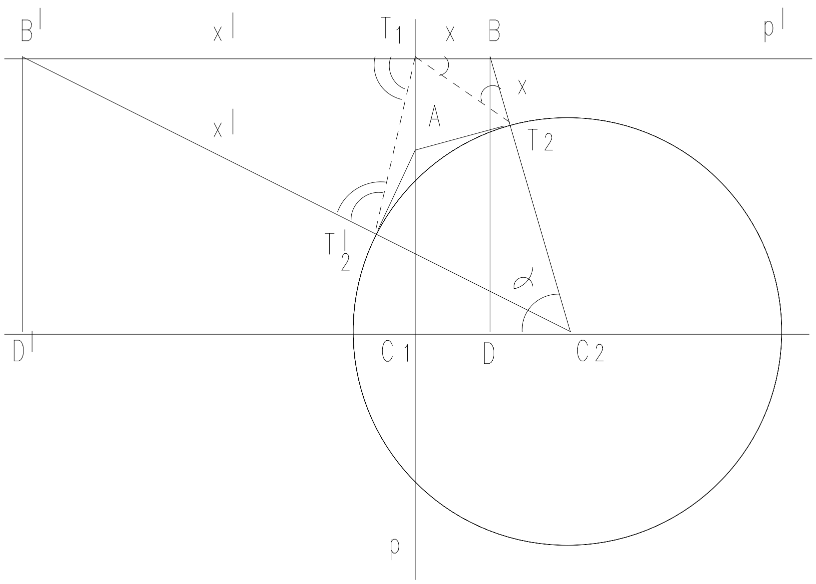
К расчету золотого сечения прямой и дуги

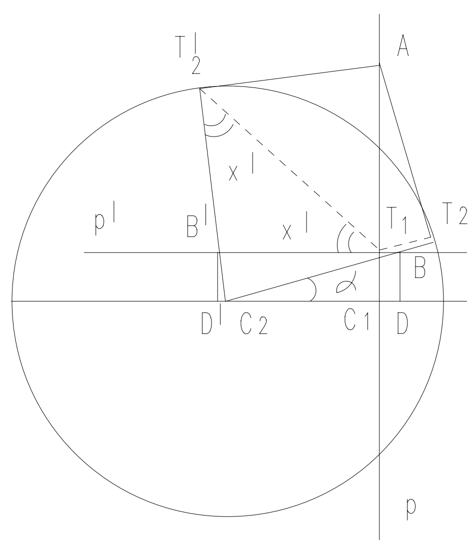


а) $h > r$; C_2 слева от $\overline{p}$.
$r < 0$: $C_2D = h - x$; $C_2B = x + r$
$r > 0$: $C_2D' = x' - h$; $C_2B' = x' - r$



б) $h > r$; C_2 слева от $\overline{p}$.
$r < 0$: $C_2D = h - x$; $C_2B = x + r$
$r > 0$: $C_2D' = x' - h$; $C_2B' = x' - r$





в) $h < r$; $T_1C_2 > r$; $r < 0$.
C_2 слева от $\overline{p}$: $C_2D = h - x$; $C_2B = r + x$
C_2 справа от $\overline{p}$: $C_2D' = h + x'$; $C_2B' = r + x'$

г) $h < r$; $T_1C_2 < r$; $r > 0$.
C_2 справа от $\overline{p}$: $C_2D = h + x$; $C_2B = r - x$
C_2 слева от $\overline{p}$: $C_2D' = x' - h$; $C_2B' = r - x'$

Рис. 6

иначе (отрезок дуги идет по часовой стрелке) для того, чтобы точка T_1 была слева по ходу контура, угол T_1BT_2 должен быть тупым, т.е.

$$x = C_2B - r. \quad (3)$$

Очевидно, если точка T_1 совпадает с C_1, то треугольник C_2BD вырождается, а точки T_2 и T_2' лежат на разных концах диаметра C_2C_1, но также для дуги против часовой стрелки берем дальнюю точку от p, а для дуги по часовой стрелке – ближнюю.

8.Рассмотрим ситуацию, когда прямая p пересекает окружность C_2, т.е. $h < r$ (рис. 6в, 6г).

Точки B и B' лежат по разные стороны от p.

Если $C_2T_1 > r$, то золотое сечение не существует для дуги против часовой стрелки, поскольку точка T_1 в этом случае всегда находится справа по ходу дуги. Соответственно, если $C_2T_1 < r$, то золотое сечение отсутствует для дуги по часовой стрелке.

Выбор той или другой секущей осуществляется таким образом, чтобы по ходу вектора отрезка p точка T_2 на дуге была слева:

если C_2 слева от вектора $\overline{p}$, то катет разрешающего треугольника $C_2D = h - x$ или $C_2D = x - h$

(уравнение от этого не зависит),

иначе (C_2 справа от вектора $\overline{p}$) $C_2D = h + x$.

Таким образом, через произвольную точку на прямой можно построить для окружности две секущие, удовлетворяющие условиям золотого сечения, и выбор одной из них обусловлен направлением положительного обхода контура, т.е. теорема доказана.

Аналогичным образом формулируется

Теорема 2. Для произвольной точки T_1 на дуге с центром C_1 существуют две ответные точки T_2 и T_2' на окружности C_2 такие, что T_1T_2 и T_1T_2' образуют золотое сечение, но только через одну из них проходит выпуклый участок контура.

Доказательство.

Пусть имеются произвольные окружности C_1 и C_2 и точка T_1 – конец или начало отрезка дуги контура с центром C_1 (рис. 7). Требуется найти точку T_2 на окружности с центром C_2, удовлетворяющую Определению 4 положительного обхода контура, такую, что отрезок T_1T_2 образует золотое сечение двух дуг.

1. Выберем на окружности C_2 точку T_2 таким образом, чтобы отрезки радиусов T_1B и BT_2 были равны. Получим равнобедренный треугольник T_1BT_2, основание T_1T_2 которого образует равные углы с касательными к окружностям в точках T_1 и T_2, т.е. удовлетворяет Определению 5.

2. Аналогично строится точка T_2'.

3. В треугольнике C_1BC_2 (рис. 7): стороны: $C_1C_2 = h$; $C_1B = r1+x$; $C_1B = r_2 - x$. Углы: $\angle C_1$ - известен;

$\angle B=2\alpha$; $\angle C_2=\pi-2\alpha-\angle C_1$.

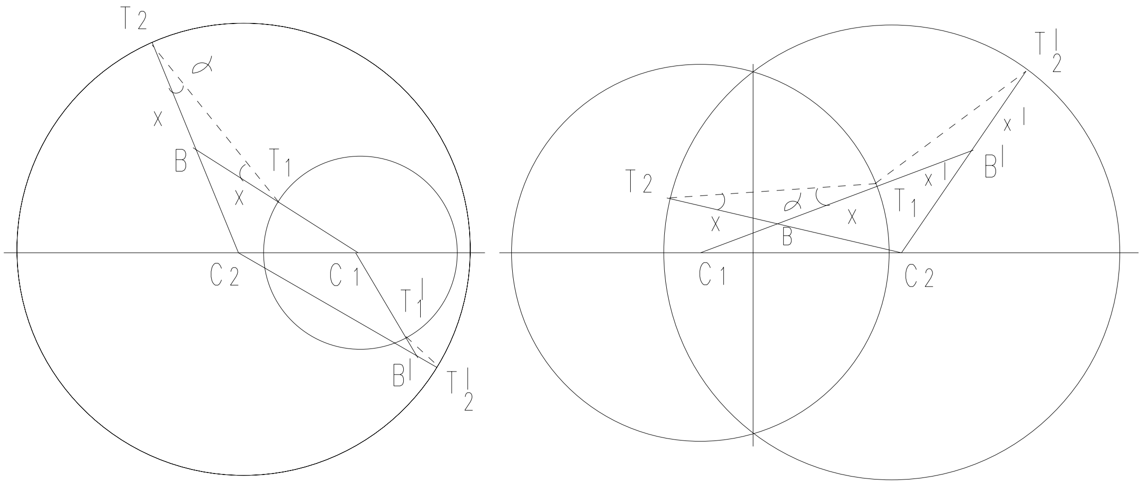
Тогда $(R_2-x)^2 = (C_1C_2)^2 + (R_1+x)^2 - 2C_1C_2(R_1+x)\cos\angle C_1$.

$$R_2^2 - 2R_2x + x^2 = (C_1C_2)^2 + R_1^2 + 2R_1x + x^2 - 2C_1C_2R_1\cos\angle C_1 - 2C_1C_2\, x\cos\angle C_1.$$

$$R_2^2 - (C_1C_2)^2 - R_1^2 + 2C_1C_2R_1\cos\angle C_1 = 2x(R_1 + R_2 - C_1C_2\cos\angle C_1).$$

$$x = \frac{R_2^2 - (C_1C_2)^2 - R_1^2 + 2(C_1C_2)\cdot R_1\cdot\cos\angle C_1}{2(R_1 + R_2 - (C_1C_2)\cdot\cos\angle C_1)},$$

$$\sin\angle C_2 = \frac{R_1 + x}{R_2 - x}\cdot\sin\angle C_1.$$



а) Стороны треугольника C_1BC_2: h; $r1 + x$; $r2 - x$.
Окружность C_1 внутри C_2 .
Если $\angle C_1 < \pi/2$, то T_2, иначе T_2'

б) Окружности C_1 и C_2 пересекаются.
Если $sign(r_1) = sign(r_2)$,
то h; $r1 - x$; $r2 – x$, иначе h; $r1 + x$; $r2 - x$.

Рис. 7

Выбор точки T_2 или T_2' обусловлен: в случае 7а – углом при вершине C_1, а в случае 7б – знаками дуг.

Теорема 3. Остов односвязного контура, составленного из отрезков прямых и дуг окружностей, есть граф типа "дерево", вершины которого лежат в точках пересечения биссектрических дуг, а ветви (ребра графа) являются их отрезками.

Доказательство.

Шаг 1. Минимизируем контур так, чтобы не было ни одной пары соседних элементов, совпадающих по своим параметрам кроме концов (рис. 8).

Шаг 2. Вычислим углы переходов между соседними элементами контура.

Шаг 3. Проверим и, при необходимости, сменим обход (последовательность элементов) контура на положительный (Определение 4).

Утверждение 1. Фигура выпуклая, если при положительном обходе контура она не содержит переходов P^- и дуг D^-.

Минимизация контура за счет одинаковых элементов

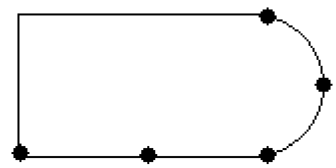
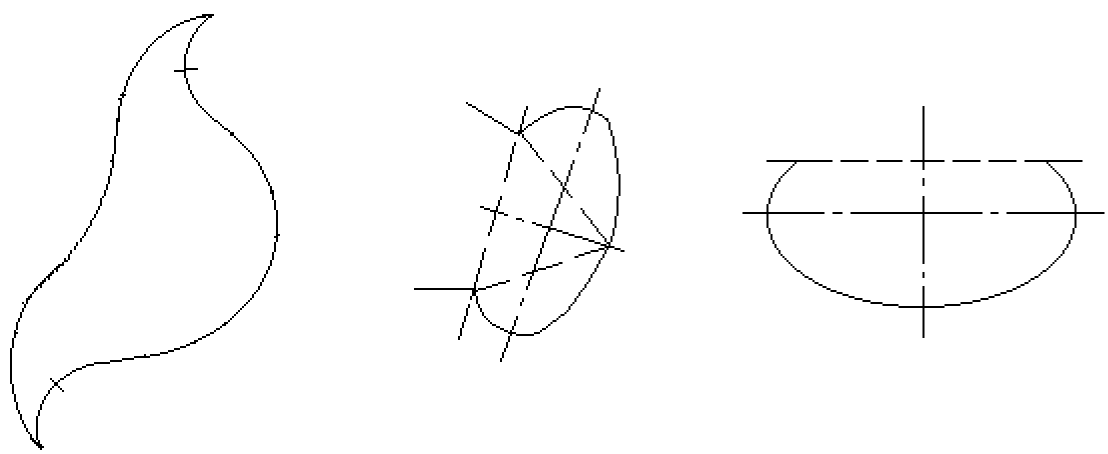


Рис. 8

Шаг 4. Найти все положительные цепочки.

Определение 6. ***Положительная цепочка*** C^{+} - это последовательность переходов P^{+}, ограниченная с обеих сторон P^{-}.

Например, фигура, изображенная на рис. 9а, содержит три цепочки C^{+}.



а) б) в)

Рис. 9

Шаг 5. Отсечение выпуклых частей фигуры.

Утверждение 2. Если хорда, отсекающая участок фигуры, ограниченный положительной цепочкой переходов, не пересекается ни с одним из элементов контура, то такой участок может быть исключен из дальнейшего рассмотрения путем замены его данной хордой (рис 9б, в).

Если по условию Утверждения 2 нельзя отсечь положительную цепочку за один прием, то следует укоротить ее путем построения золотого сечения (Определение 5) из начала или конца цепочки.

Выполняем отсечение и строим ветвь геометрического остова. В списке элементов контура заменяем отсекаемую цепочку хордой.

Шаг 6. Продолжение ветви остова. Осуществляется возврат к шагу 4, где снова выделяются положительные цепочки. Затем на них отыскиваются выступы, удовлетворяющие утверждению 2.

При выборе следующего отсечения приоритет отдается такому выступу, который содержит один мнимый элемент, т.е. хорду ранее отсеченного участка. Тогда начало нового отрезка остова устанавливается в конец предыдущего.

Цикл отсечений заканчивается, когда контур становится выпуклым. Конец остова устанавливается также, как и начало в вершину соответствующей положительной цепочки. В результате мы получим множество отрезков геометрического остова фигуры, а контур сводится к ситуации, когда все его элементы являются отсекающими хордами. Для построения разветвления необходимо вычислить центр тяжести участка и соединить его с серединами этих хорд

Построение разветвления

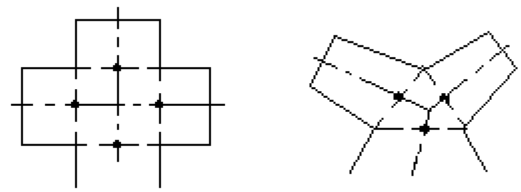


Рис. 10

Таким образом, мы получаем остов произвольного замкнутого контура в виде дерева, все ветви которого являются отрезками биссектрис, т.е. теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. F.Voronov diagrams – a survey of fundamental geometric date structure. http://msk.geometric.com/voronov.html