Конструирование образующих каналовых поверхностей

Т.И. Миролюбова
Московский государственный авиационный
институт (технический университет).

Рассматриваются вопросы конструирования поперечных сечений каналовых поверхностей посредством центральных кремоновых инволюций, сохраняющих площади фигур.

Эквиформные преобразования плоскости, как сохраняющие площади соответственных фигур, весьма удобны при конструировании сечений каналовых поверхностей [1]. В этих преобразованиях замкнутые кривые (окружность, эллипс, овал, прямоугольник и т.д.) переходят также в замкнутые кривые существенно сложной формы. Формы этих кривых соответствуют сечениям таких динамических каналовых поверхностей, как воздухозаборников, подводящих патрубков и т.д.

Рассматриваемые преобразования J_n задаются инвариантной кривой d^n моноидального типа с несобственной вершиной F_1^∞

$$y = \frac{A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_{n-1}x + A_n}{B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + ... + B_{n-1}x + B_n} \qquad (1)$$

В частном случае, когда коэффициенты при неизвестных в знаменателе уравнения (1) равны нулю, кривая d^n представляет собой параболу n-го порядка. Как известно, такие моноидальные кривые с любой прямой l параллельной оси Оу, пересекаются лишь в одной собственной точке D. Поэтому алгоритм построения собственных точек $A' \sim A$ в таких преобразованиях очень прост (рис.1):

$(AA'D = -1)$ или $\dfrac{AD}{A'D} = -1$,

то есть соответственные точки A, A' симметричны относительно D [1]. Отсюда легко выводится оператор инволюции J_n:

$$x' = x,$$

$$y_D - y = -y_D + y' \quad \text{или} \quad y' = 2y_D - y.$$

Окончательно имеем:

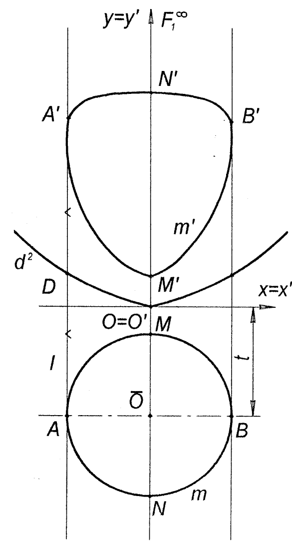

Рис. 1

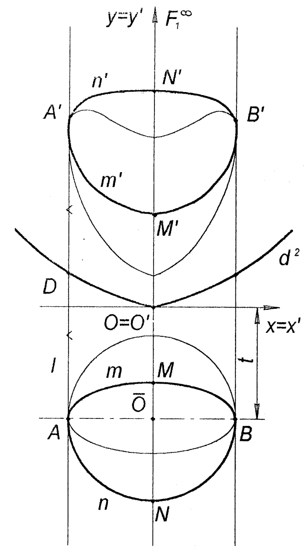

Рис. 2

$$x' = x,$$

$$y' = \frac{2(A_0x^n + A_1x^{n-1} + ... + A_{n-1}x + A_n)}{B_1x^{n-1} + B_2x^{n-2} + ... + B_{n-1}x + B_n} - y. \qquad (2)$$

На рис.1 и 2 приведены примеры квадратичных преобразований J_2 с инвариантной параболой d^2. На рис.1образом m' окружности m является рациональная кривая четвертого порядка с несобственной изолированной точкой F_1^∞. На рис.2 показан пример преобразования обвода, составленного из дуг окружности n и эллипса m в обвод, составленный из дуг m', n' кривых четвертого порядка. В силу однозначности преобразования J_2 порядки гладкости обвода - прообраза и обвода - образа равны.

Для вывода уравнений кривых m', n' конкретизируем формулы преобразования (2). В настоящем случае инволюция J_2 квадратичная и имеет инвариантную параболу d^2. Поэтому

$$x' = x,$$

$$y' = 2(A_0x^2 + A_1x + A_2) - y. \qquad (3)$$

Так как парабола d^2 проходит через начало координат ($d^2 \ni 0$), и симметрична относительно оси Оу, то A_1 и A_2 равны нулю.

Поэтому окончательно имеем:

$$x' = x,$$

$$y' = 2A_0x^2 - y. \qquad (4)$$

Записав уравнения прообразов:

окружности n в виде

$$(x')^2 + (y' + t)^2 = R^2,$$

эллипса m

$$\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y'+t)^2}{b^2}=1$$

и подставив значения x' и y' из оператора (3) инволюции J_2, получаем уравнения образования кривых четвертого порядка:

n': $$(2A_0x^2-y+t)^2+x^2-R^2=0,$$

m': $$a^2(2A_0x^2-y+t)^2+b^2(x^2-a^2)=0.$$

Другой подход к конструированию гладких замкнутых обводов, ограничивающих наперед заданные площади, основан на использовании составных преобразований.

Если плоскость разделить на несколько частей (секторов, если общий центр F_1 всех преобразований собственная точка, или полюс, когда F_1^∞ - несобственная точка) и в каждой части эти преобразования образуют составное преобразование всей плоскости в целом. В статье [2] исследованы свойства таких преобразований и выявлены условия, когда границы этих частей являются общими кратными слабоинвариантными прямыми смежных преобразований. В этом случае дуги некоторой линии m, находящиеся в каждой из этих частей, преобразуются в дуги m_i', которые на границах областей имеют определенный порядок соприкосновения, зависящий от кратности граничных слабоинвариантных прямых.

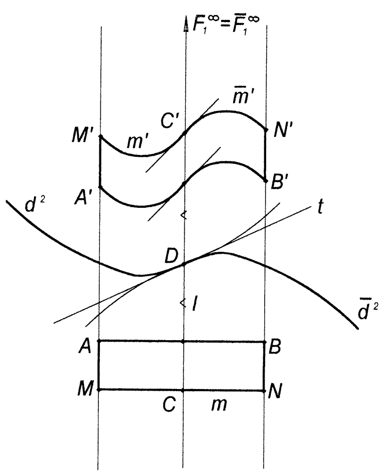

Рис. 3

На рис.3 приведен пример такого составного преобразования. Оно состоит из двух составляющих квадратичных инволюций J_2, $\bar{J}_2$ с общим несобственным центром $F_1^\infty = \bar{F}_1^\infty$. Каждая из этих инволюций задана своей инвариантной параболой d^2, $\bar{d}^2$, которые в точке D, принадлежащей границе l полуплоскостей, имеет соприкосновение первого порядка (общую касательную прямую t). Это значит, что прямая является общей двукратной слабоинвариантной прямой инволюций J_2, $\bar{J}_2$. Поэтому образы дуг m', $\bar{m}'$ некоторой линии m в точке C' - образе точки $C = m \cap l$ будут иметь двухточечное касание. В нашем примере прямоугольнику ABMN соответствует криволинейный четырехугольник $A'B'M'N'$, стороны $A'B'$ и $M'N'$ и которого представляют собой гладкие обводы из дуг двух парабол второй степени.

Очевидно, подобную форму образа $A'B'M'N'$ можно получить использованием несоставного кубического преобразования J_3, заданной инвариантной кубикой d^3. Тогда стороны $A'B'$ и $M'N'$ криволинейного четырехугольника представляли бы собой дуги парабол третьей степени.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей. -М.: Машиностроение,
-192 с. :ил.
2. Вертинская Н.Д., Иванов Г.С., Ляпина М.И. О слабоинвариантной кривой двух кремоновых инволюций с общим центром.// Моделирование задач науки и техники методами начертательной геометрии. - Алма-Ата: КПИ, 1986. -с. 50 -56.