

Неклассические модели качения линейчатых поверхностей (конус и развертка торса)

Рачковская Галина Станиславовна

Ростовский Государственный Университет
Ростов-на-Дону, Россия

Примерами классического качения линейчатых поверхностей являются качения цилиндра по развертке цилиндра, конуса по развертке конуса при условии совмещения вершин, а также торса по изгибанию данного торса. С другой стороны, качение цилиндра или конуса по развертке торса в рамках классических представлений процесса качения невозможно и в этом случае необходимо привлекать представления не классического описания данной системы, а квантового описания [1] как системы, так и её развития, то есть процесса качения линейчатых поверхностей.

Так, качение одной линейчатой поверхности по другой линейчатой поверхности может быть представлено, как отмечено в работе [2], как совокупность переходов системы взаимодействующих линейчатых поверхностей в ряду последовательных дискретных состояний, соответствующих наличию у этих линейчатых поверхностей одной общей образующей.

В этом случае приходится строить неклассические геометрические модели качения – модели перехода между соседними дискретными состояниями рассматриваемой системы.

Неклассические представления качения двух линейчатых поверхностей продемонстрированы в данном исследовании на примере качения конуса по развертке торса. Однако они могут быть применены и к другим парам взаимодействующих линейчатых поверхностей, качение которых в рамках классических представлений качения линейчатых поверхностей невозможно.

Итак, качение двух линейчатых поверхностей друг по другу может быть представлено в виде смены одной общей для этих поверхностей образующей на другую – соседнюю общую образующую, причем каждой образующей одной поверхности может быть поставлено в соответствие определенное положение второй линейчатой поверхности относительно первой, что характеризует соответствующее состояние данной системы двух взаимодействующих поверхностей.

Из определения категории «линейчатая поверхность» непосредственно вытекает представление о дискретности рассматриваемых состояний системы взаимодействующих поверхностей, что позволяет описывать качение одной линейчатой поверхности по другой как последовательность переходов данной системы между ее соседними дискретными состояниями.

В данной работе рассмотрен механизм перехода системы двух линейчатых поверхностей – конуса и развертки торса - из одного связанного единой образующей состояния в другое (соседнее) на основе ряда модельных построений, позволивших, кроме того, проанализировать возможности в каждой из моделей разложения ротативно-спироидального преобразования пространства, возникающего при построении соответствующих кинематических поверхностей.

Для наибольшей наглядности и без ущерба общности (в конечных формулах будут фигурировать только длина элементарной дуги ds и радиус кривизны R произвольной кривой f) в качестве кривой ребра возврата развертки торса рассмотрена дуга окружности f .

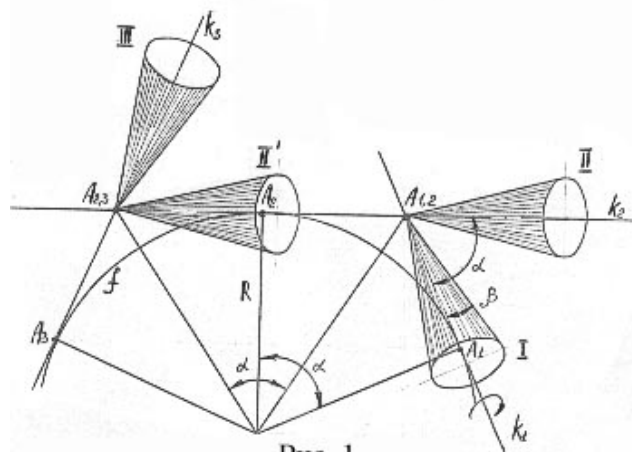


Рис. 1

На рисунке 1 изображены три последовательные точки A_1, A_2, A_3 на кривой f и три проведенные в этих точках касательные к данной кривой f : k_1, k_2, k_3 .

Поскольку при качении конуса по развертке торса, т.е. при смене их общей образующей на соседнюю вершина конуса сохраняет свое положение в пространстве, то она должна принадлежать сразу двум ближайшим образующим развертки торса, т.е. находиться на пересечении этих образующих.

Такому условию удовлетворяет положение I, выбранное в качестве начального с вершиной конуса в точке $A_{1,2}$, точке пересечения касательных k_1 и k_2 . Из этого положения I возможен переход в положение II в результате собственно качения конуса, т.е. при его повороте вокруг собственной оси на угол $\omega = \frac{\alpha}{\sin \beta}$, где α - угол между касательными k_1

и k_2 , а β - угол при вершине конуса (рис.1)

Если перевести конус из положения II в положение II', т.е. поместить вершину конуса в точку $A_{2,3}$, точку пересечения следующей пары соседних касательных k_2 и k_3 путем, например (другой способ рассмотрен ниже), скольжения конуса по касательной k_2 на расстояние Δ ($\Delta = 2R \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, где R – радиус кривизны кривой f в точке A_2), то становится возможным дальнейшее собственно качение конуса и его переход в следующее связанное с разверткой торса состояние III и т.д.

Таким образом, качение конуса по развертке торса, т.е. переход из одного связанного общей образующей в другое

связанное подобным же образом состояние можно смоделировать чередованием последовательных перемещений (скольжений) конуса вдоль образующих развертки тора и соответствующих вращений конуса вокруг собственной оси.

Если в данном построении устремить α к нулю, то траектория, описываемая вершиной конуса, стремится к кривой f , величина скольжения Δ стремится к $R\alpha$ и к ds , т.е. к длине элементарной дуги этой кривой f , а соответствующий элементарный угол поворота конуса

$$d\omega = \frac{1}{R \sin \beta} ds.$$

Как отмечалось выше, предложенная модель качения конуса по развертке тора является одной из возможных моделей. Другая возможность смещения вершины конуса из точки A_1 в точку $A_{1,2}$ для последующего собственно качения конуса по развертке тора состоит в деформации конуса, ограниченного произвольно выбранным, но фиксированным по величине круговым сечением конуса S , до конфигурации Π' (рис. 2) с вершиной деформируемого конуса в точке $A_{2,3}$.

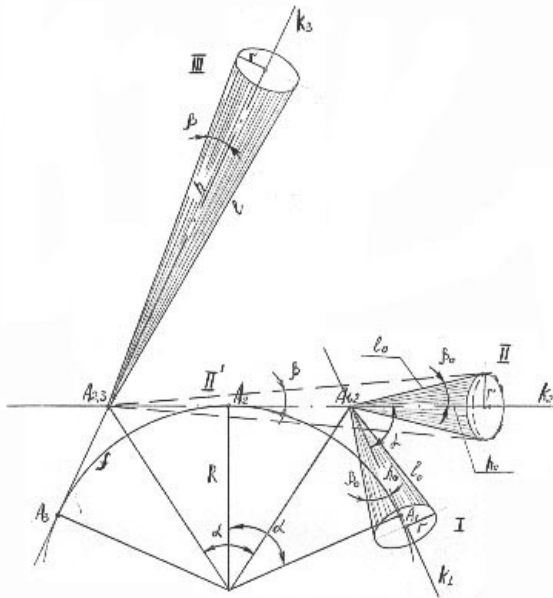


Рис. 2

Подобная процедура использована ранее в теории, названной теорией качения конуса переменной геометрии по тору или развертке тора [3-5].

В этой связи изложенная выше модель может быть названа моделью качения конуса постоянной геометрии по развертке тора [2].

В модели с деформируемым конусом при фиксированном по величине сечении $S=\pi r^2$ (r – радиус кругового сечения) при смещении вершины конуса из точки $A_{1,2}$ в точку $A_{2,3}$ происходит увеличение образующей конуса на величину $\Delta=2Rtg \frac{\alpha}{2}$, а при $\alpha \rightarrow 0$ Δ стремится к $R\alpha$ и к ds ,

т.е. к длине элементарной дуги кривой f . После достижения вершиной конуса точки пересечения касательных k_2 и k_3 становится возможным собственно качение конуса с поворотом вокруг своей оси на угол $d\omega$:

$$d\omega = \frac{1}{R \sin \beta} ds = \frac{1}{R \sin \beta_0} ds + \frac{1}{Rr} (ds)^2,$$

где β_0 – начальный угол при вершине конуса.

Таким образом, в модели с конусом переменной геометрии качение может быть смоделировано последовательным чередованием деформации конуса с перемещением вершины конуса вдоль кривой f и собственно качения с поворотом конуса вокруг собственной оси.

Как и в предыдущей модели при стремлении α к нулю траектория движения вершины конуса стремится к заданной кривой f , длина образующей выделенного конуса стремится к l_0+ds (l_0 – начальная длина образующей конуса), а соответствующий поворот $d\omega$ определяется радиусом кривизны R кривой f и начальными условиями, а именно параметрами конуса β_0 и r .

При этом, изменение геометрических параметров выделенного конуса, а именно угла при вершине конуса β и высоты конуса h определяется следующим образом:

$$d\beta = \arcsin\left(\frac{l_0}{l_0+ds} \sin \beta_0\right) - \beta_0,$$

$$dh = r \left[\operatorname{ctg} \arcsin\left(\frac{l_0}{l_0+ds} \sin \beta_0\right) - \operatorname{ctg} \beta_0 \right].$$

Приведенные элементарные изменения параметров конуса переменной геометрии, выраженные через начальные параметры и элементарные приращения длины дуги ds кривой f , позволяют путем интегрирования на конечных отрезках кривой f перейти к конечным значениям изучаемых параметров.

Таким образом, введение квантовых представлений в описание процесса качения одной линейчатой поверхности по другой и разработка на их основе неклассических геометрических моделей элементарных переходов между двумя соседними дискретными состояниями системы взаимодействующих линейчатых поверхностей позволило, во-первых, доказать саму возможность такого качения, и, во-вторых, рассмотреть и аналитически описать возможные механизмы качения конуса как переменной, так и постоянной геометрии по развертке тора.

Кинематические кривые или поверхности, образованные движением точек, связанных каким либо образом с конусом, как отмечено в работах [3-6] могут быть описаны в рамках рассмотренных геометрических моделей качения конуса как постоянной [2, 6], так и переменной [3-5] геометрии по развертке тора с помощью введения двух систем координат, одна из которых связана с разверткой тора (неподвижная система координат развертки тора OXYZ), а вторая - с конусом (подвижная система координат конуса $O_1X_1Y_1Z_1$).

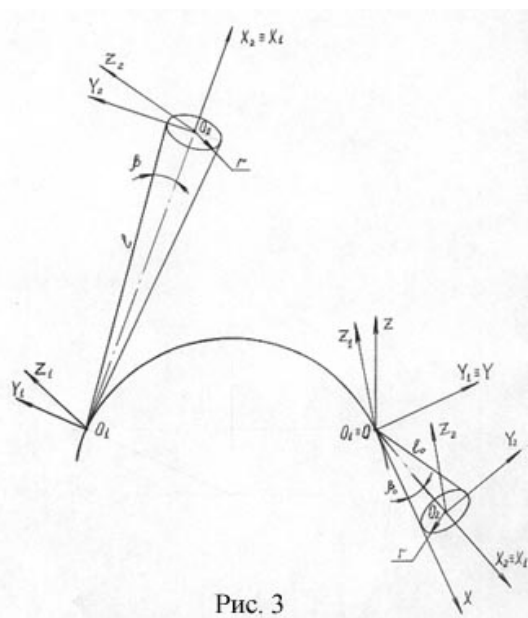


Рис. 3

Системы $OXYZ$, $O_1X_1Y_1Z_1$ - правые декартовы ортогональные системы координат (рис.3).

Начало неподвижной системы координат развертки тора O помещено в точку, соответствующую начальному положению вершины конуса на заданной кривой f ребра возврата развертки тора.

Ось OX направлена по касательной к кривой f в начальной точке.

Ось OY направлена по радиусу кривизны кривой f в начальной точке.

Ось OZ направлена в соответствии с выбранным типом системы координат.

Начало подвижной системы координат конуса O_1 связано с вершиной конуса.

Ось O_1X_1 направлена по оси конуса.

Ось O_1Y_1 - по радиусу кривизны кривой f .

Ось O_1Z_1 направлена в соответствии с выбранным типом системы координат.

При таком выборе систем координат в модели качения конуса переменной геометрии по развертке тора при смещении вершины конуса на ds вдоль кривой f движение точек, связанных с поверхностью конуса, является результатом сложения трех движений, а именно двух движений в системе координат конуса $O_1X_1Y_1Z_1$ (поступательного за счет изменения высоты выделенного конуса на величину dh и вращательного за счет соответствующего поворота конуса вокруг собственной оси на угол $d\omega$) и одного поступательного движения на величину ds системы координат конуса $O_1X_1Y_1Z_1$ в системе координат развертки тора $OXYZ$, что в итоге соответствует ротативно-спироидальному преобразованию пространства, возникающему при построении кинематических линий и поверхностей точками, связанными с поверхностью рассматриваемого конуса при его качении по развертке тора.

Введением еще одной, третьей, дополнительной системы координат $O_2X_2Y_2Z_2$, связанной с выделенным сечением конуса, как показано на рис.3, удастся убрать поступательную составляющую из описания движения рассматриваемых точек в этой системе координат конуса

$O_2X_2Y_2Z_2$, что отмечено в работе [6] и соответствует предложенной ранее модели усеченного конуса [7].

Начало дополнительной системы координат конуса O_2 находится в центре выбранного сечения конуса.

Ось O_2X_2 совпадает с осью конуса.

Ось O_2Y_2 параллельна оси O_1Y_1 .

Ось O_2Z_2 направлена в соответствии с выбранным типом систем координат.

Учитывая деформацию конуса переменной геометрии в процессе качения (изменение угла при вершине и, соответственно, радиусов круговых сечений, за исключением выделенного сечения), траектории движения связанных с конусом точек в дополнительной системе координат конуса $O_2X_2Y_2Z_2$ будут представлять собой спиралевидные кривые.

Для модели качения конуса постоянной геометрии по развертке тора движение точек, связанных с поверхностью конуса, является результатом сложения двух движений - вращательного в системе координат конуса $O_1X_1Y_1Z_1$ и поступательного системы конуса $O_1X_1Y_1Z_1$ в системе развертки тора $OXYZ$, что отражает возможность, как и в случае описанной выше модели усеченного конуса, разложения ротативно-спироидального преобразования пространства на составляющие при построении кинематических линий и поверхностей.

Таким образом, построение неклассических моделей с использованием квантовых представлений для описания процесса качения одной линейчатой поверхности по другой позволило показать саму возможность неклассического качения конуса по развертке тора и представить в аналитической форме параметрическое описание предложенных механизмов неклассического качения конуса по развертке тора в рамках геометрических моделей качения конуса постоянной геометрии и конуса переменной геометрии с учетом возможности введения, кроме того, дополнительной подвижной системы координат конуса, на основании чего проведен также сравнительный анализ кинематических следствий использования перечисленных моделей в построении новых кинематических линий и поверхностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. 1963. Изд. «Наука». Москва. 702 с.
2. Рачковская Г.С. Геометрическое моделирование качения конуса по развертке тора. Научно-технический сборник «Прикладная геометрия и инженерная графика». 2001. Киев. С.95-98.
3. Мартиросов А.Л., Рачковская Г.С. Качение конуса переменной геометрии по торсовой поверхности и ротативно - спироидальное преобразование пространства. Тезисы докладов IV Международной научно-практической конференции. Часть 3. ТГАТА. Мелитополь. 1997. С.6-9.
4. Рачковская Г.С. Построение линий и поверхностей на основе ротативных преобразований. Дисс. ...канд. тех. наук. НГАСА. Н.Новгород. 1997. 149 с.
5. Мартиросов А.Л., Рачковская Г.С. Аналитическое описание качения конуса переменной геометрии по развертке торсовой поверхности. Известия РГСУ. 1998. Вып. 3. РГСУ. Ростов-на-Дону. С.173-176.
6. Рачковская Г.С. Разложение ротативно-спироидального преобразования пространства при моделировании качения конуса по развертке тора Тезисы докладов

международной научно-практической конференции РГСУ. Ростов-на-Дону. 2001. С.139-140.

7. Рачковская Г.С. Модель усеченного конуса в теории качения конуса переменной геометрии по торсовой поверхности. Тезисы докладов международной научно-практической конференции РГСУ. Ростов-на-Дону. 2000. С.154.

РЕФЕРАТ

В работе проведено построение неклассических моделей с использованием квантовых представлений для описания процесса качения одной линейчатой поверхности по другой, что позволило показать саму возможность неклассического качения конуса по развертке торса и представить в аналитической форме параметрическое описание предложенных механизмов неклассического качения конуса по развертке торса в рамках геометрических моделей качения конуса постоянной геометрии и конуса переменной геометрии с учетом возможности введения, кроме того, дополнительной подвижной системы координат конуса, на основании чего проведен сравнительный анализ кинематических следствий использования перечисленных моделей в построении новых кинематических линий и поверхностей.