

Компьютерно-графическое моделирование кинематических линейчатых поверхностей на основе качения конуса по торсу

Галина Рачковская, Юрий Харабаев
Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону, Россия

РЕФЕРАТ

На основе конических преобразований торсовых поверхностей разработана *общая* математическая модель и реализован компьютерно-графический алгоритм построения кинематических линейчатых поверхностей, образованных вследствие качения конической поверхности, заданной *произвольной* выпуклой кривой в качестве её направляющей, по торсовой поверхности, заданной *произвольной* пространственной кривой в качестве её ребра возврата.

Разработанная математическая и компьютерно-графическая модель состоит из следующих основных элементов.

1. НЕКЛАССИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КАЧЕНИЯ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

Качение линейчатых поверхностей друг по другу рассматривается в рамках неклассического представления о качении линейчатых поверхностей [1, 2], как упорядоченная последовательность переходов в ряду дискретных состояний системы двух взаимодействующих между собой линейчатых поверхностей, связанных единой текущей общей для двух линейчатых поверхностей образующей.

Причем, представление о дискретности состояний системы двух взаимодействующих линейчатых поверхностей непосредственно вытекает из определения категории «линейчатая поверхность».

В процессе качения линейчатых поверхностей друг по другу каждой образующей одной поверхности ставится в соответствие определенное положение второй линейчатой поверхности относительно первой, что характеризует соответствующее состояние данной системы двух взаимодействующих линейчатых поверхностей.

Только в рамках неклассического представления качения линейчатых поверхностей друг по другу стали возможными механическая интерпретация и геометрическое моделирование качения конической поверхности по торсовой поверхности.

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАЧЕНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ТОРСОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ.

Качение конической поверхности по торсовой поверхности может быть смоделировано в виде суперпозиции двух согласованных между собой движений – поступательного движения вершины конуса на величину ds вдоль ребра возврата торса (кривая f) и соответствующего этому перемещению вершины конуса вращательного движения конуса вокруг своей оси на угол $d\varphi$ (рис. 1).

Эта согласованность движений определяется в соответствии с моделью качения конуса постоянной геометрии [1, 2] следующим уравнением:

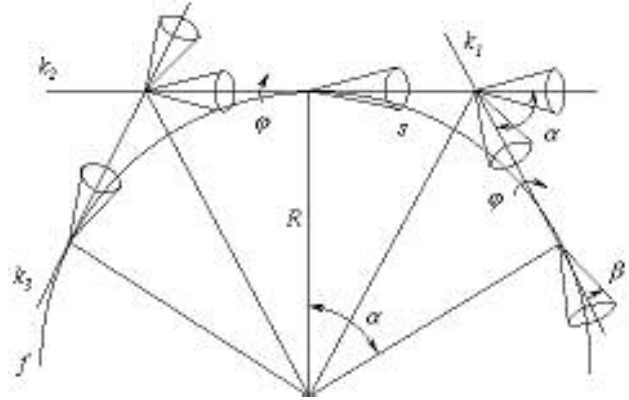


Рис. 1.

$$d\varphi = \frac{1}{R \sin \beta} ds, \quad \varphi = \int_0^s \frac{1}{R \sin \beta} ds, \text{ где}$$

R - радиус кривизны ребра возврата торса (кривой f),
 β - угол между образующей и осью конуса.

Решение этого уравнения путем интегрирования на конечных участках с учетом возможной вариации параметров исходных торсовых и конических поверхностей является основой для получения разнообразных кинематических линейчатых поверхностей, образованных вследствие качения конической поверхности по торсовой поверхности.

3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА КОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТОРСОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ (СЛУЧАЙ КАЧЕНИЯ ПРЯМОГО КРУГОВОГО КОНУСА).

Аналитическая разработка конических преобразований торсовых поверхностей потребовала введения, кроме основной системы координат $oxyz$ (правая декартова прямоугольная система координат), в которой задана кривая ребра возврата f (параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$), также и вспомогательной подвижной системы координат $OXYZ$ (рис. 2), начало которой помещено в вершине движущегося конуса, а направления осей OX , OY , OZ заданы с помощью сопутствующего трехгранника tnb , связанного с пространственной кривой f (t – касательная, n – главная нормаль, b – бинормаль).

Ось OX направлена по главной нормали n к кривой f в точке O (вершина конуса).

Направление оси OZ выбрано под углом β к касательной к кривой f в точке O так, что ось OZ совпадает с осью конуса.

Направление оси OY определено выбором правой декартовой прямоугольной системы координат $OXYZ$.

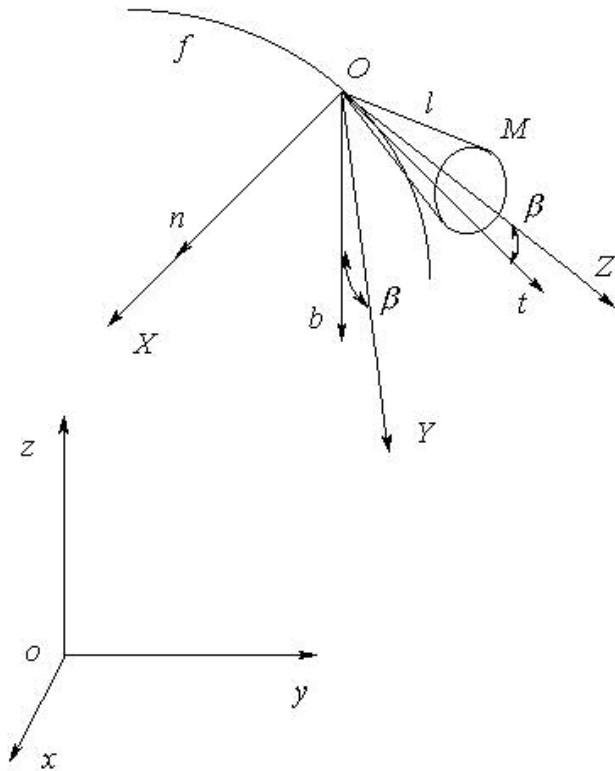


Рис. 2.

В результате конических преобразований торсовой поверхности для случая качения прямого кругового конуса уравнение кинематической кривой $f_M(x_M(t), y_M(t), z_M(t))$, описывающей в системе координат $oxyz$ траекторию движения произвольной точки M , зафиксированной на поверхности конуса (на произвольном расстоянии l от вершины конуса), имеет вид:

$$x_M(t) = x(t) + X_x X_M + Y_x Y_M + Z_x Z_M$$

$$y_M(t) = y(t) + X_y X_M + Y_y Y_M + Z_y Z_M$$

$$z_M(t) = z(t) + X_z X_M + Y_z Y_M + Z_z Z_M, \text{ где}$$

$x(t), y(t), z(t)$ – координаты вершины конуса (точки O) в системе $oxyz$;

$X_x, Y_x, Z_x, X_y, Y_y, Z_y, X_z, Y_z, Z_z$ – направляющие косинусы осей OX, OY, OZ в системе $oxyz$ [3]:

$$X_x = \frac{x''}{k_2}; \quad Y_x = \frac{y' z'' - z' y''}{k_1 k_2} \cos \beta - \frac{x'}{k_1} \sin \beta;$$

$$Z_x = \frac{x'}{k_1} \cos \beta + \frac{y' z'' - z' y''}{k_1 k_2} \sin \beta;$$

$$X_y = \frac{y''}{k_2}; \quad Y_y = \frac{y' z'' - z' y''}{k_1 k_2} \cos \beta - \frac{y'}{k_1} \sin \beta;$$

$$Z_y = \frac{y'}{k_1} \cos \beta + \frac{z' x'' - x' z''}{k_1 k_2} \sin \beta;$$

$$X_z = \frac{z''}{k_2}; \quad Y_z = \frac{x' y'' - y' x''}{k_1 k_2} \cos \beta - \frac{z'}{k_1} \sin \beta;$$

$$Z_z = \frac{z'}{k_1} \cos \beta + \frac{x' y'' - y' x''}{k_1 k_2} \sin \beta;$$

x', y', z' и x'', y'', z'' – соответственно первые и вторые производные функций $x(t), y(t), z(t)$ по параметру t ;

$$k_1 = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2};$$

$$k_2 = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2};$$

X_M, Y_M, Z_M – координаты вращающейся точки M в системе $OXYZ$:

$$X_M = l \sin \beta \cos(\varphi + \varphi_0);$$

$$Y_M = l \sin \beta \sin(\varphi + \varphi_0);$$

$$Z_M = l \cos \beta;$$

φ – угол поворота конуса вокруг своей оси в системе $OXYZ$ определяется путём интегрирования на конечных участках пути при решении основного уравнения, обеспечивающего согласованность между собой двух движений – поступательного движения вершины конуса вдоль ребра возврата торса (кривой f) и вращательного движения конуса вокруг своей оси:

$$\varphi = \int_0^s \frac{1}{R \sin \beta} ds = \int_0^t \frac{k_1}{R \sin \beta} dt, \text{ где}$$

R – радиус кривизны кривой f [4]:

$$R = \frac{\sqrt{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^3}}{\sqrt{(y' z'' - z' y'')^2 + (z' x'' - x' z'')^2 + (x' y'' - y' x'')^2}};$$

$$\varphi_0 = \varphi(t = 0).$$

По полученной кинематической кривой $f_M(t)$ и исходной кривой ребра возврата $f(t)$ может быть построена линейчатая кинематическая поверхность, как совокупность отрезков прямых, соединяющих соответствующие точки O и M на кривых $f(t)$ и $f_M(t)$ для каждого значения параметра t , что отражает движение какой либо выделенной образующей OM прямого кругового конуса при его качении по торсовой поверхности [3].

4. ОБЩАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОСТРОЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ КОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТОРСОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

На следующем этапе развития компьютерно-графической модели построения кинематических поверхностей, как результата конических преобразований торсовых поверхностей, разработана общая математическая модель, включающая в рассмотрение как произвольную кривую ребра возврата торсовой поверхности - кривую f (кривая f задана параметрически: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$), так и произвольную коническую поверхность, заданную произвольной выпуклой кривой F в качестве направляющей конической поверхности (кривая F также, как и кривая f задана параметрически: $X=X(p)$, $Y=Y(p)$, $Z=Z(p)$).

Следует подчеркнуть, что построение этой общей математической модели кинематики линейчатых поверхностей на основе конических преобразований торсовых поверхностей потребовало при её компьютерно-графической реализации перехода к численным методам дифференцирования и интегрирования.

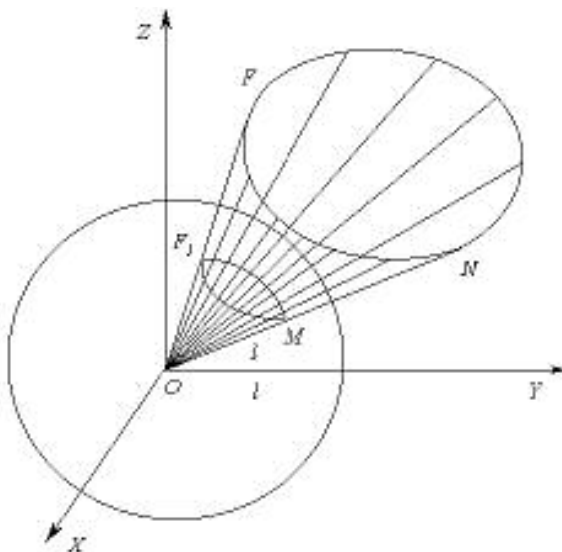


Рис. 3.

При построении общей математической модели проводится переопределение произвольной конической поверхности с помощью вспомогательной сферической направляющей - кривой F_1 , точки которой лежат на пересечении выбранной произвольной конической поверхности и сферы с центром в вершине конуса O и произвольного радиуса l (рис. 3), т.е. точки вспомогательной сферической направляющей (кривой F_1) равноудалены от вершины конуса O на расстояние l . Кривая F_1 также, как и кривая F задана параметрически: $X=X_1(p)$, $Y=Y_1(p)$, $Z=Z_1(p)$.

Произвольная образующая выбранной конической поверхности определяется вершиной конуса - точкой O и произвольной точкой N на исходной направляющей конуса - кривой F (рис.3). Эта же образующая конической поверхности может быть переопределена с помощью той же

точки O и точки M , лежащей на пересечении образующей ON и вспомогательной сферической направляющей F_1 (рис. 3). Если $X(p)$, $Y(p)$, $Z(p)$ - текущие координаты произвольной точки N на исходной направляющей (кривой F), то текущие координаты соответствующей точки M на вспомогательной сферической направляющей (кривой F_1) определяются следующими соотношениями [5]:

$$X_M = X_1(p) = \frac{lX(p)}{\sqrt{X^2(p) + Y^2(p) + Z^2(p)}} ;$$

$$Y_M = Y_1(p) = \frac{lY(p)}{\sqrt{X^2(p) + Y^2(p) + Z^2(p)}} ;$$

$$Z_M = Z_1(p) = \frac{lZ(p)}{\sqrt{X^2(p) + Y^2(p) + Z^2(p)}} .$$

Для получения кинематической поверхности, как следствия движения выделенной образующей конуса OM при качении конуса по торсу в общей математической модели вводится вспомогательная подвижная система координат $OXYZ$, связанная с ребром возврата торса (кривой f), точно так же, как и в рассмотренной выше модели качения прямого кругового конуса.

В общей математической модели использованы те же выражения для направляющих косинусов, которые были получены выше для перехода из вспомогательной подвижной системы координат $OXYZ$ в основную систему координат $oxyz$ в модели качения прямого кругового конуса. Однако, следует отметить, что в разрабатываемой общей математической модели величина угла β между образующей и осью конуса, входящая в выражения для направляющих косинусов, в отличие от рассмотренного выше случая качения прямого кругового конуса, является величиной переменной при качении конуса, т.е. $\beta = \beta(p)$ и текущее значение угла β определяется из следующего соотношения:

$$\sin \beta = \frac{R_1(p)}{l} , \text{ где}$$

R_1 - радиус кривизны вспомогательной сферической направляющей конуса - кривой F_1 :

$$R_1 = \frac{\sqrt{((X_1')^2 + (Y_1')^2 + (Z_1')^2)^3}}{\sqrt{(Y_1'Z_1'' - Z_1'Y_1'')^2 + (Z_1'X_1'' - X_1'Z_1'')^2 + (X_1'Y_1'' - Y_1'X_1'')^2}}$$

(X_1' , Y_1' , Z_1' и X_1'' , Y_1'' , Z_1'' - первые и вторые производные функций $X_1(p)$, $Y_1(p)$, $Z_1(p)$).

Кроме того, следует подчеркнуть, что в общей математической модели для нахождения уравнения кинематической кривой $f_M(x_M(t), y_M(t), z_M(t))$ и, соответственно, кинематической линейчатой поверхности, как следствия движения выделенной образующей конуса (OM) при качении конуса по торсу, необходимо для каждого заданного значения параметра t , определяющего координаты точки O в системе $oxyz$, найти соответствующее значение параметра p , определяющего координаты точки M в системе $OXYZ$ и текущее значение угла $\beta(p)$, что позволяет, в конечном счете,

рассчитать направляющие косинусы и на их основе координаты точки M в системе $oxuz$ для каждого значения t . Величина параметра p , соответствующая заданному значению параметра t , может быть найдена в результате решения основного уравнения *общей* математической модели построения кинематических линейчатых поверхностей на основе конических преобразований торсовых поверхностей, а именно, в результате решения следующего уравнения [5]:

$$\frac{1}{l} \int_{p_0}^p K_1(p) dp = \int_0^t \frac{1}{R(t)} k_1(t) dt,$$

где l – длина выделенной образующей конуса OM ;

$$p_0 = p(t = 0);$$

$$K_1 = \sqrt{(X'_1)^2 + (Y'_1)^2 + (Z'_1)^2};$$

R – радиус кривизны ребра возврата торса – кривой f ;

$$k_1 = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}.$$

Таким образом, для каждого значения параметра t , во-первых, определяются координаты точки O (вершины конуса) в системе $oxuz$ и, во-вторых, рассчитывается соответствующее значение параметра p , по которому определяются координаты точки M сначала в системе $OXYZ$, а затем в системе $oxuz$, что позволяет описывать положение выделенной образующей конуса (OM) в процессе качения конуса по торсу, т.е. описывать кинематическую линейчатую поверхность.

5. КОМПЬЮТЕРНО-ГРАФИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА (VISUAL BASIC 6.0) ПОСТРОЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ КОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТОРСОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

В компьютерной программе построения кинематических линейчатых поверхностей на основе конических преобразований торсовых поверхностей реализованы численные методы дифференцирования и интегрирования, что позволяет включать в компьютерно-графическое моделирование кинематических поверхностей новые классы исходных кривых, задающих как торсовую, так и коническую поверхности.

Разработанная компьютерная программа обеспечивает визуализацию полученных кинематических линейчатых поверхностей, предоставляет широкий набор элементов управления, вынесенных на экран дисплея, позволяющих с помощью компьютерной “мыши” изменять параметры исходных кривых и поверхностей (угол при вершине конуса β , длина выделенной образующей конуса l , параметры a и b для эллиптического конуса и эллиптической винтовой линии, шаг h и число витков n для винтовой линии, используемой в качестве ребра возврата торса), а также частоту линий, изображающих линейчатые поверхности, линейные размеры и размещение на экране результирующих кинематических линейчатых поверхностей.

Реализованная в данной программе концепция трехмерных представлений позволяет с помощью манипулятора “мышь” выполнять всевозможные вращения графических объектов, в частности, полученных кинематических поверхностей с целью визуального анализа и оценки их технико-эстетических характеристик.

В программе предусмотрена также возможность вывода с экрана на печать полученных кинематических линейчатых поверхностей.

В качестве примера на рисунках 4–7 приведены некоторые из построенных кинематических линейчатых поверхностей для случаев качения прямого кругового (рис. 4) и прямого эллиптического (рис. 5) конуса по торсу с ребром возврата в виде цилиндрической (эллиптической) винтовой линии (рис. 4, 5), а также для случаев качения прямого кругового (рис. 6) и прямого эллиптического (рис. 7) конуса по торсу с ребром возврата в виде конической винтовой линии (рис. 6, 7).

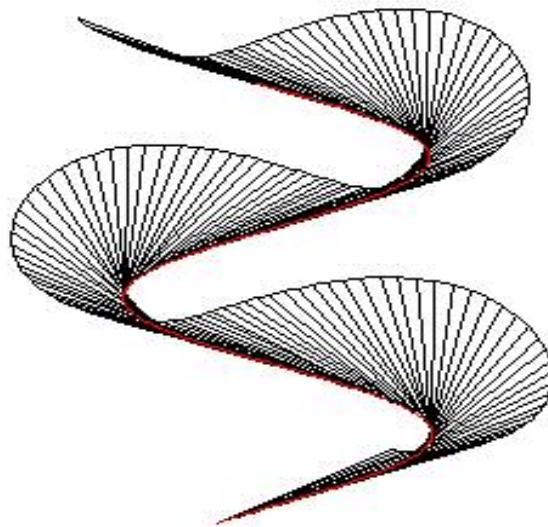


Рис. 4.

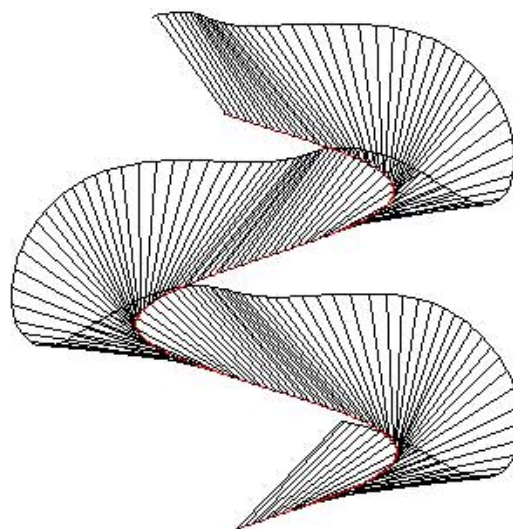


Рис. 5.

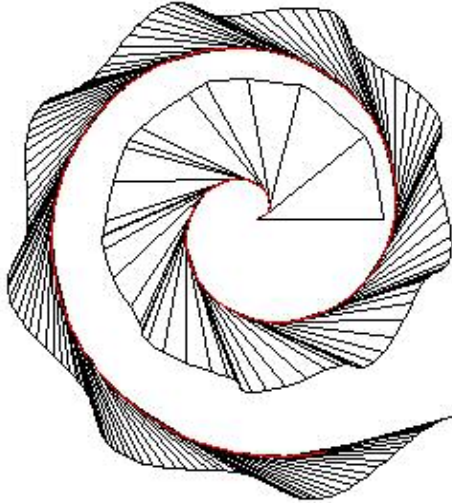


Рис. 6.

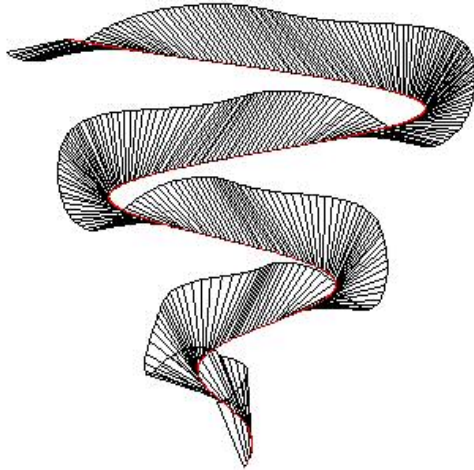


Рис. 7.

6. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рачковская Г.С. Неклассические модели качения линейчатых поверхностей (конус и развертка торса). ГРАФИКОН' 2001. Н.Новгород. С. 153-156.
- [2] Рачковская Г.С. Моделирование качения конуса по развертке торса и разложение ротативно-спироидального преобразования пространства. Известия Ростовского государственного строительного университета. 2001. Ростов-на-Дону. С. 54-59.
- [3] Рачковская Г.С., Харабаев Ю.Н. Аналитическое описание и компьютерная модель кинематики линейчатых поверхностей на основе конических преобразований торсовых поверхностей. Научно-технический сборник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». 2002. Київ. Випуск 71. С. 242-246.
- [4] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. 1968. Москва. 720 с.
- [5] Rachkovskaya G.S., Kharabayev Yu.N. Mathematical modelling of kinematics of ruled surfaces based on conical transformations of torses. Proceedings of The 10th International Conference on Geometry and Graphics. 2002. Kyiv. Ukraine. Vol.1. P.283-286.

7. АВТОРЫ

Рачковская Галина Станиславовна

Кандидат технических наук,
старший научный сотрудник
Ростовского государственного университета.

Адрес:

Россия, 344007, Ростов-на-Дону,

Пушкинская ул., 107, кв. 25.

Телефон: 8(863-2)44-12-37.

E-mail: cons@aaanet.ru

Харабаев Юрий Николаевич

Главный специалист «ПроектНИИстройдормаша»
по проблемам автоматизации проектных работ и
управления производственной деятельности.

Адрес:

Россия, 344008, Ростов-на-Дону,

Буденновский пр., 1-«Б», кв. 46.

Телефон: 8(863-2)62-23-45.