Евклидова задача Штейнера, для четырех произвольных планарных терминальных точек

Синицын С.И.
Нижний Новгород

Аннотация

Выявлены закономерности, возникающие при построении планарного евклидова дерева Штейнера для четырех произвольных терминальных точек. Их использование позволяет сократить число вариантов поиска абсолютно минимальной связывающей сети.

Исследованы все возможные структуры претендующих на минимум деревьев. Предложен геометрический метод построения дерева Штейнера. Доказана теорема о равенстве двух деревьев Штейнера при перпендикулярных диагоналях. Предложен алгоритм поиска минимального дерева для 4 терминалов.

Ключевые слова

Дерево Штейнера, четыре произвольные терминальные точки, вычислительная геометрия, оптимизация сетей

1. Введение

При создании дорог, линий электропередач, трубопроводных систем возникает проблема формирования сети минимальной длины. На языке теории графов эта задача формулируется следующим образом. Существует несколько терминальных вершин (точек). Их необходимо соединить некоторой системой ребер (линий) таким образом, чтобы любые две вершины были соединены либо одним ребром, либо цепью вершин и ребер. При этом суммарная длина всех ребер должна быть минимальной.

Различают два случая. Первый состоит в том, что не допускается вводить дополнительные вершины. Такая задача называется построением минимального остовного дерева (МОД). Существуют два эффективных алгоритма Краскала и Прима [1,2], предназначенные для построения МОД. Второй случай состоит в том, что разрешается вводить произвольное количество дополнительных вершин и соединяющих их ребер. Такая задача называется задачей Штейнера. Ее решение приводит к построению дерева Штейнера (ДШ), а дополнительные вершины называются точками Штейнера (ТШ).

Существуют геометрические алгоритмы [3], позволяющие оценить и построить ДШ, в случае его существования, либо подтвердить геометрическую невозможность такого построения. Однако, для произвольного набора точек алгоритм Мелзака [3] имеет сложность 2^N. И вообще, как показано в [4] задача Штейнера NP-трудна, поэтому поиски частных закономерностей, позволяющих сократить число перебираемых вариантов, является актуальной задачей.

Доказано, что число точек Штейнера по крайней мере на 2 меньше, чем заданное число терминальных вершин. При этом, если число ТШ ровно на 2 меньше, чем число терминалов, то такое ДШ называется полным (ПДШ), если их меньше, то ДШ не полное. Ребра дерева Штейнера, примыкающие к ТШ, расположены под углом $\mathbf{2\pi/3}$ по отношению друг к другу. Это требование приводит часто к невозможности существования ПДШ. Сложность проблемы определяется еще и тем, что построение ПДШ еще не гарантирует абсолютного минимума возможной сети, хотя часто абсолютный минимум - это ПДШ.

В заключение опишем алгоритм построения ДШ для произвольного треугольника, который мы будем использовать в случае отсутствия существования ПДШ. На двух любых сторонах треугольника внешним образом следует построить равносторонние треугольники. Соединить полученные новые вершины с оставшимися не используемыми. Точка пересечения линий определит ТШ.

2. Исследование структур возможных деревьев

Исследуем различные структуры деревьев, которые можно построить в этом случае. Вначале будем полагать, что все заданные точки принадлежат углам выпуклой оболочки, т.е. они образуют выпуклый четырехугольник. Вначале будем предполагать, что точка Штейнера единственна. Возникающие структуры деревьев представлены на рис. 1,2.

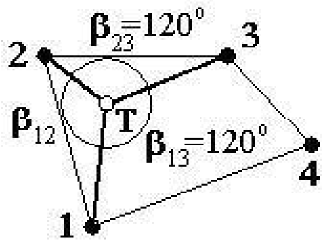

Рис 1.

Анализируя более подробно случай, изображенный на рис. 1, приходим к выводу, что точка Т является ТШ треугольника 123, а значит все углы, примыкающие к ней, будут по 120°. К этому дереву 1Т2Т3Т требуется добавить минимальный из отрезков 34 или 14. Будем иметь в виду, что можно построить 4 подобных дерева, используя в качестве базы треугольники 234, 341, 412. Заметим, что если тупые углы каждого из этих треугольников не превосходят 120 градусов, то они все существуют.

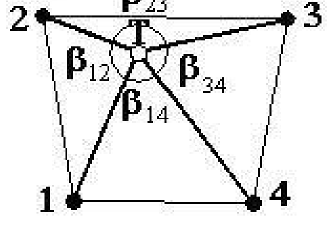

Рис. 2

Проанализируем более подробно случай, изображенный на рис. 2. Заметим, что в этом случае минимальная сеть получается (автором было сделано аналитическое доказательство), если точка Т является точкой пересечения диагоналей 13 и 24.

Рассмотрим теперь варианты возможного существования 2 точек Штейнера. Возникающие при этом структуры деревьев изображены на рис. 3,4.

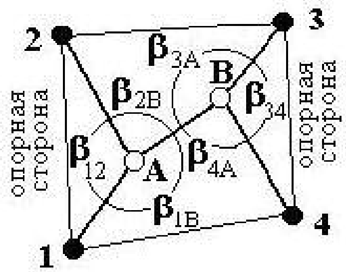

Рис. 3.

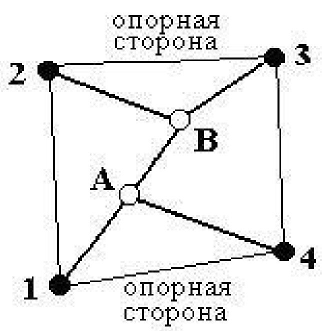

Рис. 4

Минимальная длина таких деревьев достигается (автором было проведено аналитическое доказательство), если все шесть углов β, обозначенных на рис. 3, будут по 120°. Напомним, что на рис. 3, 4 изображена топология полных деревьев Штейнера для 4 точек. В дальнейшем построение ПДШ нас будет интересовать в первую очередь.

В заключение пункта рассмотрим вырожденные случаи. Они связаны с тем, что только три точки из четырех образуют выпуклую оболочку.

Следует различать 3 различных варианта:

Вариант 1. Четвертая точка совпадает с ТШ для базового треугольника 123 (рис.5). Геометрически это выражается в том, что углы между ребрами, инцидентными внутренней точке равны 120°. Это означает, что невозможно построить более короткое дерево, чем минимальное остовное дерево (МОД).

ДШ=МОД=14+24+34

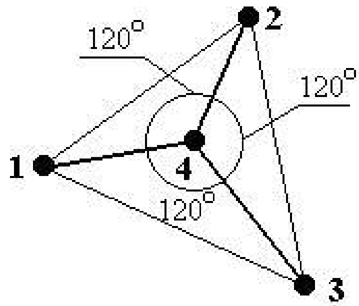

Рис. 5

Вариант 2. Если два угла между ребрами, инцидентными внутренней точке оказались больше 120° (рис. 6), то на треугольнике, в который входит третий меньший угол, возможно построить ДШ. На рис. 6 таким треугольником является 234. К нему следует добавить самый короткий из отрезков, соединяющих вершины внутреннего оптимизированного треугольника 234, с оставшейся вершиной (на рис. 6 –это 14).

ДШ=2S+3S+4S+14

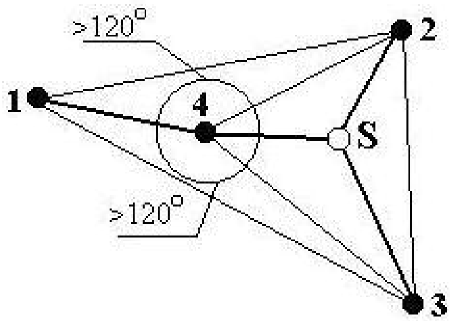

рис. 6

Вариант 3. Если 2 угла, примыкающие к внутренней вершине оказались меньше, чем 120°, то необходимо построить на каждом таком внутреннем треугольнике ДШ, добавив к каждому соответствующий минимальный из оставшихся отрезков. Другими словами, нужно два раза выполнить задачу, представленную на рис. 6, и меньший получившийся результат принять за окончательный.

Для иллюстрации этого более сложного случая рассмотрим следующий пример, часто встречающийся на практике (см. рис. 7). Даны два примыкающих друг к другу прямоугольных треугольника с общей стороной 24. Будем считать для определенности, что 14>34. На каком из треугольников 124 или 234 следует строить ДШ?

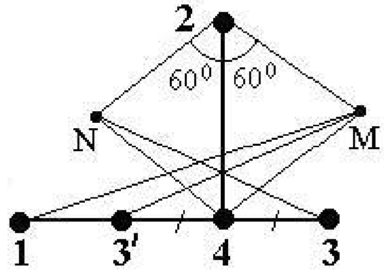

Рис. 7

Для ответа на этот вопрос построим на стороне 24 два равносторонних треугольника 24M и 24N. Величина ДШ для 124 равна 1M, для 24 соответственно 3N. Для треугольника 124 следует добавлять 34. Отрезок 14 добавляют соответственно для треугольника 234. Не проводя сложных вычислений, геометрическим построением ответим на поставленный вопрос. Для этого проведем зеркальное отражение вокруг отрезка 24 треугольника 24N и отрезка 34. Результат показан на рис 7.(Точка N совпадет M, а точка 3 займет положение 3’)

Неравенство треугольника 1M3’:

13’+3’M>1M; следовательно

13’+3’M+3’4>1M+34

позволяет сделать следующий вывод: *всегда для примыкающих прямоугольных треугольников дерево Штейнера следует строить на большем из них.*

Внутренняя парадоксальность этого вывода связана с тем результатом, что эффект построения ДШ для прямоугольных треугольников имеет минимум для равнобедренного случая. Любое отклонение ухудшает эффективность этого построения.

Рассмотренный метод легко обобщить на случай любых примыкающих треугольников с углами меньшими 120°.

3. Геометрический метод построения дерева Штейнера в четырехугольнике.

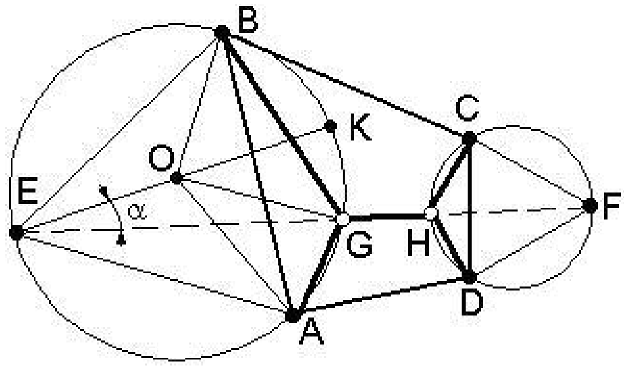

Рис. 8

Дерево Штейнера определяется тем, что его отрезки, примыкающие к каждой ТШ, образуют между собой углы 120°. Этот факт позволяет предложить следующий способ их построения. На противоположных сторонах исходного четырехугольника ABCD строим равносторонние треугольники ABE и DCF. Опишем около каждого треугольника окружность. Соединим точки E и F отрезком. Точки пересечения EF и окружностей определят ТШ G и H. Докажем это. Углы EGB и EGA опираются на дуги 120°, и на основании теоремы о вписанном угле они равны 60°, следовательно, углы BGH и AGH равны 120°. Аналогично доказывается равенство углов, примыкающих к точке H.

Используя рис. 8, докажем теорему о величине дерева Штейнера в четырехугольнике.

Теорема:
сумма пяти отрезков ДШ равна длине отрезка EF, т.е. AG+BG+GH+CH+DH=EF.

Для доказательства достаточно показать BG+GA=EG. Через точку E проведем диаметр окружности EK, обозначим центр этой окружности O. Угол KEG обозначим α. Угол EGK прямой, т.к. он вписанный и опирается на диаметр окружности, тогда EG = EK $\cos\alpha$ = 2R $\cos\alpha$. Угол KOG=2α на основании теоремы, что вписанный угол меньше центрального в 2 раза. Угол AOK=60°, т.к. он центральный и опирается на дугу KGA=60°.Таким образом, угол GOA=60° – 2α. Подобным образом доказывается, что угол GOB=60°+2α. На основании теоремы косинусов из треугольника GOA получим: GA = 2R $\sin(30°–\alpha)$; а из треугольника GOB: GB = 2R$\sin(30°+\alpha)$.

После элементарных тригонометрических преобразований получим:
GA+GB = 2R $\cos\alpha$. Аналогичным образом доказывается, что CH+HD=HF. Теорема доказана.

Использование данного метода при построении алгоритма заставляет отслеживать случаи вырождения ПДШ, которые могут быть двух типов:

- Первый тип связан с отсутствием, например, пересечение отрезка CD с линией EF (см. рис. 8). При этом, если пересечение с прямой CD проходит за точкой D (вне отрезка CD), то строится не полное дерево, включающее в себя треугольник ABD и меньшую из сторон CD или BC. Если пересечение с прямой CD проходит за точкой C (вне отрезка CD),, то строится не полное дерево, включающее в себя треугольник ABC и меньшую из сторон CD или AD.
  Аналогично требуется отслеживать пересечение стороны AB с линией EF. В случае отсутствия обоих пересечений невозможно построить ДШ.
- Второй тип связан с вырождением ДШ при совпадении точек G и H. Очевидным условием такого совпадения будет угол между диагоналями четырехугольника равными или большими 120°.

Неравенство треугольников (рис. 8) EAF, EBF, ECF, EDF показывает, что ПДШ всегда эффективнее, чем ДШ любого треугольника плюс оставшаяся сторона, когда минимальной является пересекаемая отрезком EF сторона (неполное ДШ).

4 Теорема о диагоналях четырехугольника

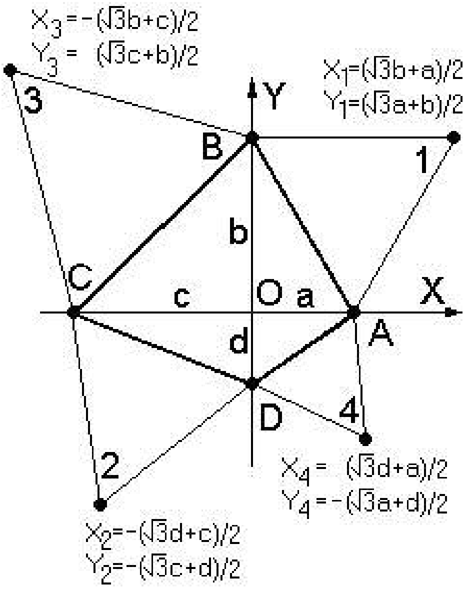

Рис. 9

<u>Теорема:</u>

Если диагонали любого четырехугольника перпендикулярны между собой и существует возможность построения двух полных деревьев Штейнера, то оба они будут иметь одинаковую длину.

Для доказательства теоремы воспользуемся геометрическим методом построения ДШ, рассмотренным в п. 3. Расположим диагонали четырехугольника ABCD на осях декартовой системы координат (рис. 9). Произвольные отсекаемые части диагоналей обозначим маленькими латинскими буквами a, b, c, d. Построим внешним образом на сторонах четырехугольника равносторонние треугольники AB1, BC3, CD2, AD4. Согласно геометрическому методу величина первого дерева Штейнера равна отрезку 12, а второго - 34. Для нахождения величины отрезков вначале определим координаты фокусных точек 1, 2, 3, 4. Значения координат также показаны на рис. 9

Несложно теперь доказать равенство 12=34.

<u>Следствие:</u>

В качестве опорных сторон (рис 3,4) для построения ДШ следует выбирать такие, которые расположены напротив острых углов, образуемых пересечением диагоналей четырехугольника.

В заключение пункта покажем, что сумма диагоналей четырехугольника, являясь локальным минимумом сети, построенной на 4 точках не может претендовать в любом случае на абсолютный минимум (рис. 10).

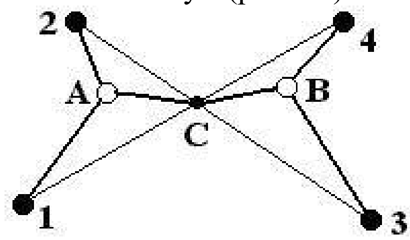

Рис 10

Отметим сразу, что точка C является общей для 4 треугольников, на которые разбивается диагоналями наш четырехугольник1234, а значит, мы можем в противоположных треугольниках, если углы в них не превышают 120° построить отдельные деревья Штейнера, а значит получить более короткое дерево, чем сумма двух диагоналей, но и это еще не предел, т.к. угол ACB по сравнению с ПДШ меньше 180°.

5. Алгоритм построения дерева Штейнера для 4 точек.

1. Если только три точки из четырех терминальных образуют выпуклую оболочку, то для построения ДШ можно использовать один из 3 вариантов, изображенных на рис. 5,6,7. Большой эффективности от построения ДШ не будет.
2. Если все четыре терминальные точки образуют выпуклую оболочку, то вначале определяется точка пересечения диагоналей. В качестве опорных сторон (рис.3) выбирается та пара, которая лежит против острых углов, образуемых диагоналями. При попытке построения ПДШ используется геометрический метод п.3.
3. Если ПДШ строится, что определяется фактическим пересечением отрезков EF и AB, EF и CD (рис.8), то именно оно будет абсолютным минимальным связывающим деревом. При этом не

требуется контролировать вырождение ДШ из-за обнуления отрезка GH (рис.8)

4. При невыполнении предыдущего пункта сразу определяется тот треугольник, на котором следует построить неполное ДШ. Одна из точек этого треугольника является ближайшей к внешнему пересечению отрезков из предыдущего пункта.

Литература

[1] Прим Р.К. Кратчайшие связывающие сети и некоторые обобщения : Кибернетический сборник.- М.: Иностранная литература, 1961.- с.95-107.

[2] Kruskal J.B. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problems, Prac. AVS 7, 48-50 (1956).

[3] Melzak. Z.A. On the problem of Steiner. Canadian Mathematics Bulletin, 4:143-149, 1961.

[4] Garey M.R. Graham R.L. Johnson D.S. Some NP-complete geometric problems.- Eighth Annual Symp. on Theory of Comput., 1976, pp 10-22.

Сведения об авторе

СИНИЦЫН СЕРГЕЙ ИВАНОВИЧ – кандидат технических наук, Доцент каф. начертательной геометрии, машинной графики и САПР Нижегородского государственного архитектурно - строительного университета,

тел. **(8312) 30-54-00**.

E-mail: **sinsiva@mail.nnov.ru**