

# Функции Возмущения в Геометрическом Моделировании

Вяткин С.И., Долговесов Б.С.

Институт Автоматики и Электрометрии, СО РАН, Новосибирск, Россия

[sivser@mail.ru](mailto:sivser@mail.ru), [bsd@iae.nsk.su](mailto:bsd@iae.nsk.su).

## Аннотация

Рассмотрен подход к преобразованиям описывающей функции для геометрических операций: проецирования, офсеттинга, теоретико-множественных и метаморфозиса. Дана характеристика более сложных операций для функционально заданных объектов с применением функций возмущения: заметание движущимся твердым телом и кручение тел. Исследуется задача определения столкновений функционально заданных объектов. Обсуждается способ определения столкновений функционально заданных объектов за постоянное время для различной сложности столкновений.

**Ключевые слова:** Функции возмущения, Геометрические операции, Бинарные отношения.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Геометрическая концепция моделирования виртуальной среды на базе F-гер [1] описана как алгебраическая система:

$$(M, \Phi, W), \quad (1)$$

где  $M$  - множество геометрических объектов,  $\Phi$  - множество геометрических операций,  $W$  - множество отношений на множество объектов.

Функционально заданные геометрические объекты с применением функций возмущения достаточно подробно изложены в работе [2]. В данной работе мы не будем делать анализ главных отличительных черт нашего подхода (детально описывать способ задания геометрических объектов и алгоритм визуализации) в сравнении с известными методами [3-5]. Отметим следующие основные функциональные способы задания примитивов и методы их визуализации. Поверхности свертки [6-8] – это интегральное представление неявно заданных поверхностей, известных в компьютерной графике как капельные модели [9, 10], метасферы [11], мягкие объекты [12]. Данные поверхности сочетают в себе гибкость капельных моделей и компактность скелетных моделей [13] и представляют собой гораздо более мощное средство геометрического моделирования, чем традиционные модели неявных поверхностей [14]. Несмотря на различные названия все эти модели описывают фактически один и тот же объект, а именно изоповерхность  $S$  уровня  $T$  в скалярном поле  $f(\mathbf{p})$ :

$$S = \{\mathbf{p} \in R^3 | f(\mathbf{p}) - T = 0\} \quad (1)$$

Поверхность свертки - это неявная поверхность  $S$  с базовой функцией  $f(\mathbf{p})$ , полученная с помощью свертки:

$$f(\mathbf{p}) = g(\mathbf{p}) * h(\mathbf{p}) = \int_{R^3} g(\mathbf{r}) h(\mathbf{p} - \mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (2)$$

, где  $\mathbf{r}$  – расстояние действия поля.

Геометрическая функция  $g(\mathbf{p})$  определяет форму объекта и его положение в трехмерном пространстве. Ядро свертки  $h(\mathbf{p})$  определяет распределение потенциала в каждой точке

объекта. Свертка двух функций - это скалярная функция  $f(\mathbf{p})$ , которая является поверхностью свертки. Поверхности свертки – это изоповерхности, с той разницей, что скалярное поле  $f(\mathbf{p})$  задается с помощью различных геометрических объектов.

Рассмотрим известные методы визуализации, отметим их достоинства и недостатки.

- *Маршировка по лучу.* Это метод «грубой силы» пошаговых вычислений вдоль луча, функция  $f(t)$  вычисляется на каждом шаге. Первое изменение знака функции  $f(t)$  сигнализирует о том, что найдена поверхность  $F(r) = f(t) = 0$ . Главный недостаток этого метода заключается в том, что он очень медленный и не гарантирует обнаружение поверхности.
- *Метод LG–поверхности.* Разработан метод обнаружения поверхности с применением  $L$ - и  $G$ - параметров, которые являются константами Липшица для функции  $f$  и производной  $df/dt$  вдоль луча. Для неалгебраической функции  $f$  вычисления  $L$ - и  $G$ - параметров становятся сложными, даже если они представлены в символической форме.
- *Трассировка луча с анализом интервала.* Данный метод является модификацией метода  $LG$  – поверхности.
- *Быстрая трассировка луча* [14]. Данный метод лишен недостатков перечисленных выше методов, однако поиск лучей, пересекающих поверхности сложен и не достаточно эффективен, поскольку способы кластеризации этого метода не решают данную проблему полностью.

В данной работе использовался для визуализации алгоритм многоуровневого отслеживания лучей [2], который осуществляет эффективный поиск точек поверхностей, участвующих в формировании изображения, а для определения столкновений объектов применялся этот же алгоритм с небольшой модификацией. Алгоритм визуализации максимально адаптирован к аппаратной реализации [15].

Одним из примеров отношений может служить определение столкновений между объектами. В ряде приложений: динамике столкновений тел и небесной механике, молекулярной динамике и компьютерных играх - возникает проблема моделирования поведения взаимодействующих тел, имеющих нерегулярную форму [16-18]. В результате работы известного алгоритма определения столкновений объектов [19], столкновение не всегда может быть определено и, кроме того, для разных столкновений требуется разное количество времени, сильно различающееся. Целью этой работы является исследование возможности применения известных унарных, бинарных и более сложных геометрических операций для функционально заданных объектов на базе функций возмущения, предложенных в работе [2], а также - показать, что с помощью модифицированного алгоритма [2] столкновение объектов определяется за постоянное и меньшее время для различной сложности столкновений с полной гарантией обнаружения событий.

## 2. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ЗАДАНИЕ ОБЪЕКТОВ С ПРИМЕНЕНИЕМ ФУНКЦИЙ ВОЗМУЩЕНИЯ

Дадим краткое определение функций возмущения, описанное в работе [2]. Предложено описание сложных геометрических объектов с помощью задания функций возмущения от базовых треугольников [20] (рис. 1 и 2), плоскостей и квадрик [2] (рис.3).

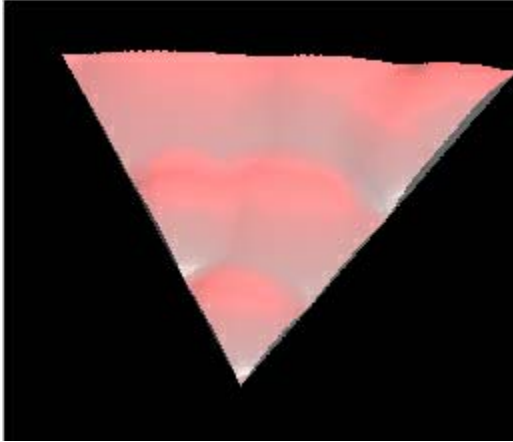


Рис. 1. Патч произвольной формы.

Свободная форма есть композиция базовой поверхности и возмущения  $F^3(x,y,z) = F(x,y,z) + R(x,y,z)$ , где функция возмущения  $R(x,y,z)$  находится следующим образом:

$$R(x,y,z) = \begin{cases} Q^2(x,y,z), \text{ при } Q(x,y,z) > 0 \\ 0, \text{ при } Q(x,y,z) \leq 0, \end{cases} \quad (3)$$

где  $Q(x,y,z)$  – например, возмущающая квадрика. В качестве  $Q$  также может быть свободная форма.

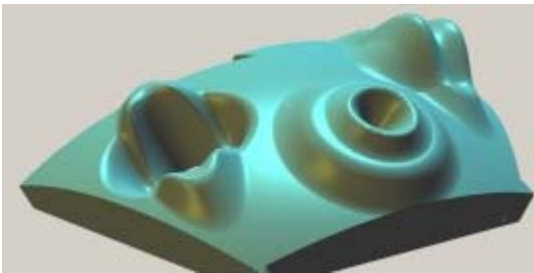


Рис. 2. Три гладкосопряженных патча произвольной формы.

Таким образом, задача конструирования объекта сводится к задаче деформации базовой поверхности нужным образом, а не к аппроксимации ее примитивами. Предложенный способ описания объектов трехмерных сцен базовыми поверхностями и функциями возмущения имеет компактное описание, что позволяет уменьшить в 500 и более раз объем передаваемых данных.

## 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ

Множество геометрических операций  $\Phi$  математически выражается следующим образом:

$$\Phi_j: M^1 + M^2 + \dots + M^n \rightarrow M, \quad (4)$$

где  $n$  – номер операнда операции.

Пусть объект  $G_1$  определен как  $f_1(X) \geq 0$ . Унарная операция ( $n=1$ ) (4) объекта  $G_1$  означает операцию  $G_2 = \Phi_j(G_1)$  с определением:

$$f_2 = \psi(f_1(X)) \geq 0, \quad (5)$$

где  $\psi$  – непрерывная вещественная функция одной переменной. Рассмотрим следующие унарные операции.



Рис. 3. Композиция квадрик и функций возмущения.

### 3.1 Проекции

Пусть исходный объект  $G_1 \subset E^n$  описывается функцией  $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ , а его проекция  $G_2 \subset E^{n-1}$  описывается функцией  $f_2(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \geq 0$ . Объект  $G_2$  может быть определен как объединение сечений объекта  $G_1$  гиперплоскостью  $x_i = C_j$ , где  $C_{j+1} = C_j + \Delta x_i$ ,  $j=1, N$  и  $C_1 = x_{imin}$ . Пусть  $f_{ij} = f_1(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, C_j, x_{i+1}, \dots, x_n)$  – функция для сечения. В итоге функция для проекции при  $\Delta x_i \rightarrow 0$  есть объединение всех функций  $f_{ij}$ :

$$f_2 = f_{i1} \vee f_{i2} \vee \dots \vee f_{ij} \vee \dots \vee f_{iN}. \quad (6)$$

В реализации данной операции для всей сцены фиксировалась одна координата в зависимости от того, какую проекцию требовалось получить (рис. 4).



Рис. 4. Функционально заданный объект и его проекции.

### 3.2 Оффсеттинг

С помощью данной операции можно создавать увеличенную или уменьшенную копию исходного объекта, то есть делать положительный или отрицательный оффсеттинг соответственно (рис.5).



Рис. 5. Положительный и отрицательный оффсеттинг.

Например, можно имитировать пульсацию тела. Пусть исходный объект задается функцией  $f(X) > 0$ , тогда при применении такой операции полученное тело будет описываться функцией  $F = f(X) + C$ , где  $C < 0$  определяет отрицательный оффсеттинг (сжатие), а  $C > 0$  – положительный оффсеттинг (расширение).

### 3.3 Теоретико-множественные операции

Пусть объекты  $G_1$  и  $G_2$  определены как  $f_1(X) \geq 0$  и  $f_2(X) \geq 0$ . Бинарная операция ( $n=2$ ) (4) объектов  $G_1$  и  $G_2$  означает операцию  $G_3 = \Phi_j(G_1, G_2)$  с определением:

$$f_3 = \psi(f_1(X), f_2(X)) \geq 0, \quad (7)$$

где  $\psi$  - непрерывная вещественная функция двух переменных.

Геометрическая модель должна позволять конструировать объекты и их композиции неограниченной сложности. Достигается это, в первую очередь, применением булевых операций объединения и пересечения (рис. 6).



Рис. 6. Теоретико-множественные операции над объектами.

### 3.4 Метаморфозис

При метаморфозисе (морфинге) осуществляется плавный переход начального образа в конечный (рис. 7).

Пусть мы имеем  $F_1, F_2$  - значения функций возмущения первого и второго объектов, соответственно, тогда результирующая функция возмущения  $F$  вычисляется следующим образом:

$$F = \beta F_1 + (1 - \beta) F_2, \quad (8)$$

где  $\beta$  - положительная непрерывная функция.

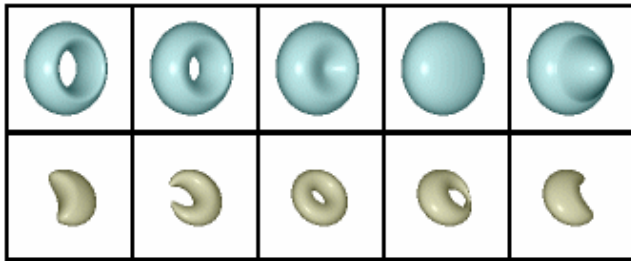


Рис. 7. Морфинг негеоморфных объектов.

Далее мы рассмотрим сложные геометрические операции: кручение и заметание движущимся твердым телом.

### 3.5 Кручение

Кручение это деформация тела, являющаяся частным случаем биективного отображения (рис. 8), которое служит для определения деформаций исходных объектов. Для кручения исходного тела были найдены и преобразованы координаты  $x, y, z$ .

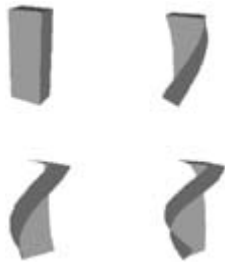


Рис. 8. Результаты реализации кручения.

### 3.6 Заметание

Заметание движущимся твердым телом является одной из давних и трудных проблем в твердотельном моделировании [21]. Рассмотрим заметание как проекцию движущегося тела из  $4D(x, y, z, t)$  в  $3D(x, y, z)$  пространство. Вновь образованная фигура представляет собой объединение изображений заметающего тела при различных положениях (рис. 9).



Рис. 9. Заметание движущимся твердым телом.

## 4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТОЛКНОВЕНИЙ

Одним из примеров отношений может служить определение столкновений между объектами. Бинарное отношение есть множество множества  $M^2 = M \times M$ . Оно может быть определено как:

$$S_j: M \times M \rightarrow I \quad (9)$$

Алгоритм обнаружения столкновений, описанный в [19], основан на отношении пересечения и использует псевдослучайные последовательности Соболя и спиральный квадратичный поиск для обнаружения неотрицательных величин функции, определяющей пересечение. При этом для определения области, в которой ведется поиск, используются ограничивающие тела сферы. В результате работы этого алгоритма столкновение не всегда может быть определено, т.е. алгоритм не гарантирует обнаружения события. А также для разных столкновений требуется разное количество времени, сильно различающееся.

### 4.1 Определение столкновений функционально заданных объектов на основе рекурсивного деления объектного пространства

Пусть объекты  $G_1$  и  $G_2$  определены как  $f_1(X) \geq 0$  и  $f_2(X) \geq 0$ . Бинарная операция пересечения объектов  $G_1$  и  $G_2$  определяется следующим образом [19]:

$$S_c(G_1, G_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } G_1 \cap G_2 = \emptyset \\ 1, & \text{если } G_1 \cap G_2 \neq \emptyset \end{cases} \quad (9)$$

Функция  $f_3(X) = f_1(X) \& f_2(X)$  может быть использована для вычисления  $S_c$ . Можно утверждать, что  $S_c = 0$ , если  $f_3(X) < 0$  для любой точки пространства  $E^n$ .

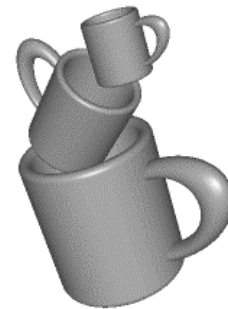


Рис. 10. Определение столкновений функционально заданных объектов на базе функций возмущения.

После вычисления пересечения (9), т.е. применения булевой операции пересечения, поиск точки соприкосновения сталкивающихся объектов осуществляется с помощью алгоритма подобного [2]. С помощью особого теста на пересечение пирамид разного уровня (на последнем уровне четверичного деления - луча) [2, 22, 23] и бинарного поиска

можно за постоянное число шагов (определяется заданной точностью) определить точку столкновения объектов, если такое происходит. В целях расчета времени обнаружения столкновений тестировались объекты, различавшиеся как по степени сложности (форме), так и по виду столкновения (имеется в виду столкновение различными сторонами и частями объектов) (рис. 10).

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследованы некоторые геометрические операции над функционально заданными объектами на базе функций возмущения.

В исследуемом алгоритме определения столкновений функционально заданных объектов столкновение всегда определяется и не зависит от взаимного расположения сталкивающихся объектов и частей их поверхностей, т.е. такой алгоритм гарантирует обнаружение события, что доказано экспериментально и теоретически, разброс времен при тестировании был не более 1% от данного времени.

## 6. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Pasko A. A., Adzhiev V. D., Sourin, A. I. et al. Function representation in geometric modeling: concepts, implementation and applications // The Visual Computer.1995. 11( 6). P. 429.
- [2] <http://www.cgg.ru/febr/vjat/pivweb.html#a>.
- [3] [http://cis.k.hosei.ac.jp/~F-rep/imp\\_biblio.html](http://cis.k.hosei.ac.jp/~F-rep/imp_biblio.html)
- [4] <http://www.amazon.com/exec/obidos/ASIN/155860233X/ref%3Dnosim/leonardodicap05>
- [5] <http://www.unchainedgeometry.com/jbloom/pdf/impencyc.pdf>
- [6] Bloomenthal J., Shoemake K., "Convolution surfaces", SIGGRAPH'91, Computer Graphics, vol.25, No.4, 1991, P 251-256.
- [7] G. Sealy, G. Wyvill. Smoothing of three dimensional models by convolution. In Computer Graphics International'96, June 1996, P 184-190.
- [8] McCormack J., Sherstyuk A. Creating and rendering convolution surfaces, Computing Graphics Forum, vol. 17, No.2, 1998, P 113-120.
- [9] J. F. Blinn. A generation of algebraic surface drawing. ACM Transactions on Graphics, 1(3): 235-256, July 1982.
- [10] S. Muraki. Volumetric shape description of range data using "blobby model". Computer Graphics, 25(4): 227-235, July 1991.
- [11] H. Nishimura, M. Hirai, T. Kawai, T. Kawata, I. Shirakawa, and K. Omura. Object modelling by distribution function and a method of image generation. The Transactions of the Institute of Electronics and Communication Engineers of Japan, J68-D (4): 718-725, 1985.
- [12] G. Wyvill, C. McPheeters, and B. Wyvill. Data structure for soft objects. The Visual Computer, 2(4): 227-234, 1986.
- [13] Bloomenthal J. Sceletal Design of Natural Forms. Doctoral dissertation, University of Calgary, Department of Computer Science, 1995.
- [14] A. Sherstyuk. Fast ray tracing of implicit surfaces. In Implicit Surfaces'98, P 145-153, June 1998.
- [15] [http://www.graphicon.ru/2000/RENDERING/Vyatkin\\_Dolgo vesov Yesin Zigach Chizhik.doc](http://www.graphicon.ru/2000/RENDERING/Vyatkin_Dolgo vesov Yesin Zigach Chizhik.doc)
- [16] M. C. Lin, "Efficient Collision Detection for Animation and Robotics", PhD thesis, Dept. of Electrical Eng. and Computer Science, University of California, Berkeley, USA, 1993.
- [17] A. Gregory, M. Lin, et al. "H-Collide: A Framework for Fast and Accurate Collision Detection for Haptic Interaction". IEEE Virtual Reality, 1999.
- [18] D. C. Ruspini, K. Kolarov, and O. Knatib. "The haptic display of complex graphical environment". *Proceedings of SIGGRAPH 97*, vol. 1, pp. 295-301, August 1997.
- [19] Savchenko V.V., Pasko A.A. Collision detection for functionally defined deformable objects: The First International Workshop on Implicit Surfaces (Grenoble, France, April 18-19, 1995) /Eds. B.Wyvill and M.P. Gascuel: Eurographics-INRIA, 1995,P.217.
- [20] [http://www.graphicon.ru/2002/pdf/Vyatkin\\_Dolgo vesov v\\_Re.pdf](http://www.graphicon.ru/2002/pdf/Vyatkin_Dolgo vesov v_Re.pdf)
- [21] Wang W.P., Wang K.K. Geometric modeling for swept volume of moving solids // IEEE Computer Graphics and Applications.1986. V. 6. N.12. P. 8.
- [22] <http://www.ixbt.com/video/conv-surfaces.shtml>
- [23] <http://www.ixbt.com/video/sintez-voxel.html>

## About the authors

Sergei I. Vyatkin (Ph.D.) is a scientific researcher of Synthesizing Visualization Systems Laboratory at Institute of Automation and Electrometry SB RAS.

His contact email is [sivser@mail.ru](mailto:sivser@mail.ru).

Boris S. Dolgoesov (Ph.D.) is a head of Synthesizing Visualization Systems Laboratory at Institute of Automation and Electrometry SB RAS.

His contact email is [bsd@iae.nsk.su](mailto:bsd@iae.nsk.su)

## Perturbation Functions in Geometric Modeling

### Abstract

The task of functionally defined geometric modeling including sets of objects based on perturbation functions, unary and binary operations, and binary relations are discussed. Transformations of a perturbation function are described for set-theoretic operations, offsetting, projection, sweeping by a 3D sphere, twisting, and metamorphosis.

The problem of collision detection of functionally defined objects based on perturbation functions for constant time is considered. The collision detection algorithm of different complexity during a constant time is discussed. An algorithm of recursive object space subdivision is proposed. In the perturbation function representation, collision detection becomes trivial due to the inside/outside property of the functionally defined surface.