

Обнаружение прямых линий на изображениях на основе преобразования Хартли. Быстрое преобразование Хафа

Д.Б. Волегов*, В.В. Гусев**, Д.В. Юрин***

* Московский физико-технический институт (государственный университет)

** Московский государственный университет, ВМиК

*** ФГУП НПП ОПТЭКС,

dvolegov@rambler.ru tassadar@inbox.ru yurin_d@inbox.ru

Аннотация

Предложен алгоритм вычисления быстрого преобразования Хафа при помощи преобразования Хартли, основанный на эквивалентности преобразования Хафа для прямых линий и преобразования Радона. Использование преобразования Хартли вместо преобразования Фурье позволяет сократить вдвое требуемый для вычислений объем памяти и ускорить работу преобразования. Приведено сравнение скорости работы преобразования Хафа при помощи преобразования Фурье [6] и при помощи преобразования Хартли.

Ключевые слова: преобразование Хафа, преобразование Радона, преобразование Хартли, обнаружение прямых линий, обнаружение особенностей, фильтрация изображений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Преобразование Хафа является распространённым способом поиска кривых и, особенно, прямых на изображениях. Согласно [4] преобразование Хафа есть отображение из пространства изображения в пространство параметров кривой. В настоящей статье рассматривается лишь поиск прямых. Опишем процесс вычисления преобразования Хафа для поиска прямых.

Зададим прямую на изображении двумя параметрами: ρ – расстояние от прямой до начала координат, φ – угол между внешней нормалью прямой и осью абсцисс (рис.1). Уравнение прямой записывается через параметры ρ, φ следующим образом:

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \rho \quad (1)$$

x, y – координаты точки на изображении. Уравнение (1) устанавливает отображение из множества прямых на изображении во множество точек плоскости параметров (ρ, φ) . С другой стороны, каждой точке (x_0, y_0) на изображении соответствует синусоида в пространстве параметров, задаваемая уравнением (1), причем каждая точка на этой синусоиде соответствует некоторой прямой, проходящей через (x_0, y_0) . Разделим пространство параметров на ячейки и свяжем с каждой ячейкой счетчик. Для каждой точки (x_0, y_0) изображения построим синусоиду в пространстве параметров с яркостью, пропорциональной яркости точки изображения (x_0, y_0) ; увеличим счетчики ячеек, через ко-

торые прошла синусоида, на яркость синусоиды. Если счетчик ячейки с центром (ρ_0, φ_0) набрал много голосов, то на изображении есть много ярких точек, лежащих на прямой с параметрами, близкими к (ρ_0, φ_0) .

Приведенный выше алгоритм можно применять не только для обнаружения прямых линий, но и произвольных параметрических кривых. Его недостаток в том, что он медленный. В связи с этим разработано множество методов приближенного вычисления преобразования Хафа.

Отметим, что преобразование Хафа для прямых практически эквивалентно преобразованию Радона [5]. А для вычисления преобразования Радона разработаны эффективные алгоритмы.

В работах [7,8] приведён алгоритм вычисления быстрого преобразования Радона, основанный на рекурсивном вычислении интегралов вдоль прямых. Для изображения из n точек вычисляются $O(n \log(n))$ интегралов вдоль 'базисных' прямых, а затем показывается, что интеграл вдоль любой прямой может быть выражен через сумму не более чем $O(\log(n))$ интегралов вдоль 'базисных' прямых. Его сложность составляет $O(n \log(n))$. Однако в процессе работы алгоритма строится граф, содержащий n вершин и $16n \left(\frac{\log(n)}{2} + 1 \right)$ ребер, что предьявляет чрезмерные требования к памяти.

В [6] предложен способ быстрого вычисления преобразования Радона через двумерное преобразование Фурье. Сложность этого алгоритма составляет $O(n \log(n))$.

В настоящей статье предлагается способ быстрого вычисления преобразования Радона через двумерное преобразования Хартли. Шаги предлагаемого алгоритма в основном аналогичны [6] и описаны в разделе 2. Его сложность также составляет $O(n \log(n))$. Благодаря тому, что преобразование Хартли в отличие от преобразования Фурье оперирует вещественными числами, и результатом преобразования являются вещественные числа, расходы памяти вдвое меньше. Также достигается выигрыш в производительности благодаря следующим свойствам преобразования Фурье и Хартли. Во-первых, Фурье-преобразование матрицы действительных чисел симметрично, поэтому при его вычислении половина производимых операций является лишней. А преобразование Хартли содержит ту же спектральную информацию, что и Фурье, но в действительных числах, а не в комплексных. Во-вторых, при вычислении преобразования Хартли данные рас-

положены компактнее, что также положительно сказывается на его производительности. Приводится сравнение скорости работы преобразования Радона при помощи преобразования Фурье и при помощи преобразования Хартли.

2. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ХАРТЛИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

В дальнейшем будут рассматриваться линейные операторы, отображающие пространство функций n переменных в себя.

Аргументами функций являются векторы пространства \mathbf{R}^n . Линейный оператор, действующий на функцию $f(\vec{\xi})$, обозначается жирным шрифтом с крышкой $\hat{\mathbf{X}}^{(n)}$, в скобках сверху указывается размерность оператора.

$$[\hat{\mathbf{X}}^{(n)} f(\vec{\xi})](\vec{\eta}) = (f(\vec{\xi}), X^{(n)}(\vec{\xi}, \vec{\eta})) \quad (1)$$

где круглые скобки обозначают скалярное произведение двух функций в гильбертовом пространстве:

$$(f(\vec{\xi}), X^{(n)}(\vec{\xi}, \vec{\eta})) \equiv \int_{\mathbf{R}^n} f(\vec{\xi}) X^{(n)}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) d^n \vec{\xi} \quad (2)$$

$$\vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbf{R}^n$$

через $X^{(n)}(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ обозначается ядро интегрального оператора $\hat{\mathbf{X}}^{(n)}$.

2.1 Прямое Преобразование Радона

Для функции $f(x, y)$ двух переменных преобразованием Радона называется функция $R(\rho, \varphi)$, которая определяется следующим образом [6]:

$$R(\rho, \varphi) = \iint f(x, y) \delta(\rho - x \cos \varphi - y \sin \varphi) dx dy \quad (3)$$

$$\int \delta(x) dx = 1$$

Другими словами $R(\rho, \varphi)$, есть интеграл от функции $f(x, y)$ вдоль прямой, удалённой от начала координат на расстояние ρ , нормаль к которой составляет угол φ с осью абсцисс (рис.1).

В операторной форме преобразование Радона записывается так:

$$[\hat{\mathbf{R}}^{(2)} f(x, y)](\rho, \varphi) = (f(x, y), R^{(2)}(x, y, \rho, \varphi))$$

$$R^{(2)}(x, y, \rho, \varphi) = \delta(\rho - x \cos \varphi - y \sin \varphi)$$

Оператор $\hat{\mathbf{R}}^{(2)}$ называется оператором преобразования Радона.

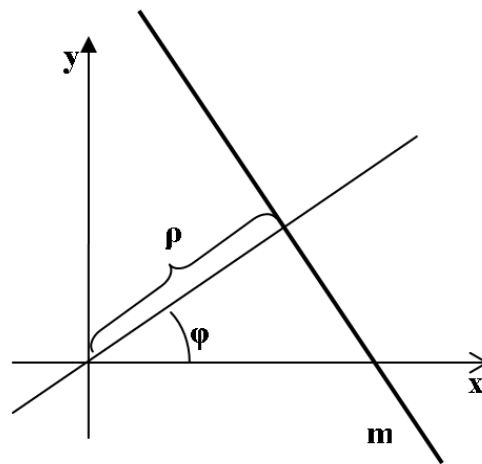


Рис. 1. Преобразование Радона $R(\rho, \varphi)$ функции $f(x, y)$ есть интеграл от функции $f(x, y)$ вдоль прямой m , которая удалена на расстояние ρ от начала координат и нормаль к которой составляет угол φ с осью абсцисс.

2.2 Преобразование Фурье и преобразование Хартли

Для функции $f(\vec{\xi})$, $\vec{\xi} \in \mathbf{R}^n$ операторная форма n -мерного преобразования Фурье определяется следующим образом:

$$[\hat{\mathbf{F}}^{(n)} f(\vec{\xi})](\vec{\eta}) = (f(\vec{\xi}), F^{(n)}(\vec{\xi}, \vec{\eta})) \quad (4)$$

$$F^{(n)}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \exp(2\pi i \vec{\xi}^T \vec{\eta}), \quad \vec{\xi}, \vec{\eta} \in \mathbf{R}^n$$

$[\hat{\mathbf{F}}^{(n)} f(\vec{\xi})](\vec{\eta})$ есть n -мерное преобразование Фурье функции $f(\vec{\xi})$, а оператор $\hat{\mathbf{F}}^{(n)}$ называется оператором n -мерного преобразования Фурье. Так как при сопоставлении результатов и временных затрат предлагаемого алгоритма с [6] использовалась численная реализация БПФ из [1], то, во избежание коллизий, знак перед мнимой единицей и положение множителя 2π в преобразовании Фурье в настоящей работе выбирался также как в [1].

Ядро оператора обратного преобразования Фурье записывается следующим образом:

$$(F^{(n)})^{-1}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \exp(-2\pi i \vec{\xi}^T \vec{\eta}) \quad (5)$$

Ядро оператора n -мерного преобразования Хартли определяется следующим образом [2]:

$$H^{(n)}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) = \text{cas}(2\pi \vec{\xi}^T \vec{\eta}) \quad (6)$$

$$\text{cas}(t) \equiv \cos(t) + \sin(t) = \sqrt{2} \sin(t + \frac{\pi}{4}) \quad (7)$$

Оператор $\hat{\mathbf{H}}^{(n)}$ называется оператором n -мерного преобразования Хартли.

Преимущество преобразования Хартли перед преобразованием Фурье в том, что оно вещественно: если $f(\vec{\xi}) \in \mathbf{R}^{(n)}$, то и $[\hat{\mathbf{H}}^{(n)} f(\vec{\xi})](\vec{\eta}) \in \mathbf{R}^{(n)}$. Это позволяет оперировать только вещественными числами.

Отметим важные свойства преобразования Хартли.

Прямое и обратное преобразования Хартли совпадают:

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{H}}^{(n)})^{-1} &= \hat{\mathbf{H}}^{(n)} \\ H(\vec{\eta}) &= [\hat{\mathbf{H}}^{(n)} f(\vec{\xi})](\vec{\eta}) \\ f(\vec{\xi}) &= [\hat{\mathbf{H}}^{(n)} H(\vec{\eta})](\vec{\xi}) \end{aligned} \quad (8)$$

Элементарными тригонометрическими преобразованиями из (7) получается формула для 'касинуса' суммы:

$$\begin{aligned} \text{cas}(a+b) &= \frac{\text{cas}(a)\text{cas}(b) + \text{cas}(-a)\text{cas}(b)}{2} + \\ &+ \frac{\text{cas}(a)\text{cas}(-b) - \text{cas}(-a)\text{cas}(-b)}{2} \end{aligned} \quad (9)$$

Введём обозначение:

$$\begin{aligned} Qf(\xi_1, \xi_2) &= \frac{f(\xi_1, \xi_2) + f(-\xi_1, \xi_2)}{2} + \\ &+ \frac{f(\xi_1, -\xi_2) - f(-\xi_1, -\xi_2)}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

Используя (6) и (10) двумерное преобразование Хартли выражается через одномерное преобразование:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{H}}^{(2)} f(\vec{\xi})](\vec{\eta}) &= Qh(\eta_1, \eta_2) \\ h(\eta_1, \eta_2) &\equiv [\hat{\mathbf{H}}^{(1)} g(\eta_1, \xi_2)](\eta_1, \eta_2) \\ g(\eta_1, \xi_2) &\equiv [\hat{\mathbf{H}}^{(1)} f(\xi_1, \xi_2)](\eta_1, \xi_2) \end{aligned} \quad (11)$$

Формулу (11) следует понимать следующим образом: сначала на функцию $f(\xi_1, \xi_2)$ действует оператор одномерного преобразования Хартли как на функцию одной переменной ξ_1 результатом чего является функция $g(\eta_1, \xi_2)$, затем на функцию $g(\eta_1, \xi_2)$ действует оператор одномерного преобразования Хартли как на функцию одной переменной ξ_2 результатом чего является функция $h(\eta_1, \eta_2)$, после чего $h(\eta_1, \eta_2)$ подвергается преобразованию (10).

2.3 Теорема о центральном сечении

Ключевым моментом вычисления преобразование Радона через преобразование Хартли является теорема о центральном сечении [6]. Она устанавливает связь между преобразованием Радона и преобразованием Хартли функции двух переменных $f(x, y)$. Введём оператор перехода к полярным координатам $\hat{\mathbf{P}}^{(2)}$, действующий на функцию двух переменных:

$$[\hat{\mathbf{P}}^{(2)} f(x, y)](r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \quad (12)$$

Тогда утверждение теоремы о центральном сечении выражается с помощью операторов:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{H}}^{(1)} [\hat{\mathbf{R}}^{(2)} f(x, y)](\rho, \varphi)](r, \varphi) &= \\ = [\hat{\mathbf{P}}^{(2)} \hat{\mathbf{H}}^{(2)} f(x, y)](r, \varphi) \end{aligned} \quad (13)$$

Действительно, введем обозначения

$$\vec{x} = (x, y)^T, \quad \vec{n} = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T \quad (14)$$

Тогда

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{H}}^{(1)} [\hat{\mathbf{R}}^{(2)} f(x, y)](\rho, \varphi)](r, \varphi) &= \\ = \hat{\mathbf{H}}^{(1)} \int f(\vec{x}) \delta(\rho - \vec{x}^T \vec{n}) d\vec{x} &= \text{(см. (3))} \\ = \iint f(\vec{x}) \delta(\rho - \vec{x}^T \vec{n}) \text{cas}(r\rho) d\vec{x} d\rho &= \\ \text{(см. (6), (1), (2))} & \\ = \int f(\vec{x}) \text{cas}(r\vec{x}^T \vec{n}) d\vec{x} &= \\ = [\hat{\mathbf{H}}^{(2)} f(\vec{x})](r \cos \varphi, r \sin \varphi) &= \\ = [\hat{\mathbf{P}}^{(2)} \hat{\mathbf{H}}^{(2)} f(\vec{x})](r, \varphi) \end{aligned} \quad (15)$$

Воспользовавшись (8) перепишем (13) в виде:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{R}}^{(2)} f(x, y)](\rho, \varphi) &= \\ = [\hat{\mathbf{H}}^{(1)} [\hat{\mathbf{P}}^{(2)} \hat{\mathbf{H}}^{(2)} f(x, y)](r, \varphi)](\rho, \varphi) \end{aligned} \quad (16)$$

Таким образом, согласно (16) для вычисления преобразования Радона (а значит и преобразования Хафа для прямых линий) функции $f(x, y)$ необходимо (рис.2):

Алгоритм 1. Преобразование Радона.

1. Вычислить преобразование Хартли функции.
 $H(\xi, \eta) = [\hat{\mathbf{H}}^{(2)} f(x, y)](\xi, \eta)$
2. Выполнить переход к полярным координатам.
 $P(r, \varphi) = H(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$
3. Применить одномерное преобразование Хартли к $P(r, \varphi)$ как к функции одной переменной r .
 $[\hat{\mathbf{R}}^{(2)} f(x, y)](\rho, \varphi) = [\hat{\mathbf{H}}^{(1)} P(r, \varphi)](\rho, \varphi)$

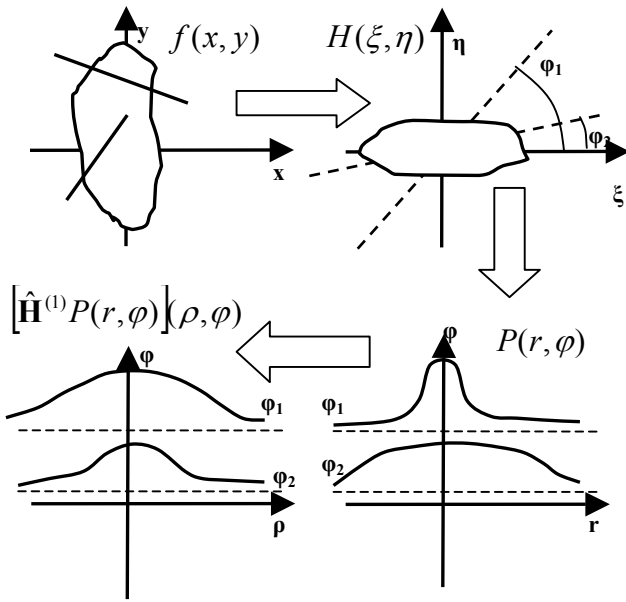


Рис. 2. Схема вычисления преобразования Радона через преобразование Хартли.

3. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ РАДОНА

Алгоритм вычисления преобразования Радона основан на формуле (16). На рис.3 приведена схема алгоритма вычисления преобразования Радона и промежуточное изображение после каждого шага. Ниже каждый шаг рассматривается подробнее.

3.1 Дополнение нулями и ограничение окном

При работе с изображениями вводится декартова система координат (СК): ось абсцисс направлена вправо, ось ординат вверх, начало системы координат находится в центре изображения. Интенсивность пикселей представляется вещественным числом одинарной точности (32 бита).

Изначально изображение является прямоугольным с размерами $U \times V$. Чтобы обнулить интеграл интенсивности по изображению из него вычитается среднее значение. Для уменьшения низкочастотных составляющих, показывающих лишь то, что изображение прямоугольное, изображение умножается на колокол Гаусса $\exp(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2})$ с центром в начале координат и дисперсией

$$\sigma_x = \frac{U}{4}, \quad \sigma_y = \frac{V}{4}.$$

Затем размер изображения дополняется до ближайшей степени двойки, так как преобразование Хартли может работать только с такими изображениями. Размеры изображения становятся $W \times W$, W - минимальная степень двойки, превосходящая U и V .

Чтобы избежать наложения частот (эффекта Гиббса) при преобразовании Хартли изображение $W \times W$ дополняется нулями по ширине и высоте, до размера

$$N \times N = 2^b W \times 2^b W, \quad b = 0, 1, 2, \dots$$

Параметр b выбирался равным 1 или 2. Дальнейшее увеличение b не приводило к улучшению результатов, как и в [6].

3.2 Дискретное преобразование Хартли

В реальности изображение состоит из пикселей, поэтому вводится дискретная версия оператора преобразования Хартли.

Одномерное дискретное преобразование Хартли (ДПХ) N -мерного вектора $\vec{f}^N = (f_0^N, f_1^N, \dots, f_{N-1}^N)$ согласно [2]

есть вектор $\vec{h}^N = (h_0^N, h_1^N, \dots, h_{N-1}^N)$:

$$h_n^N = \sum_{k=0}^{N-1} f_k^N \cos \frac{2\pi kn}{N} \quad (17)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1$$

Как и для быстрого преобразования Фурье (БПФ) [1], используя (6), (9) выводится рекуррентное соотношение [2]:

$$h_n^N = h_{n,even}^{N/2} + \cos \frac{2\pi n}{N} h_{n,odd}^{N/2} + \sin \frac{2\pi n}{N} h_{-n,odd}^{N/2} \quad (18)$$

$$h_{n+mN}^N = h_m^N, \quad m \in \mathbf{Z}$$

где $\vec{h}_{even}^{N/2}$ есть вектор из чётных компонент вектора \vec{h}_{even}^N , а $\vec{h}_{odd}^{N/2}$ из нечётных компонент. На основе соотношения (18) строится рекурсивный алгоритм быстрого преобразования Хартли (БПХ), требующий $N \log N$ операций.

Условимся обозначать матрицу жирным шрифтом с двумя индексами внизу. Элементы матрицы обозначаются обычным шрифтом.

Двумерное ДПХ квадратной $N \times N$ матрицы $\mathbf{I}_{i,j}$, $i, j = 0 \dots N-1$ есть [2] квадратная матрица $\mathbf{H}_{i,j}$:

$$H_{k,l} = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} I_{m,n} \cos \frac{2\pi(km + nl)}{N} \quad (19)$$

$$k, l = 0 \dots N-1$$

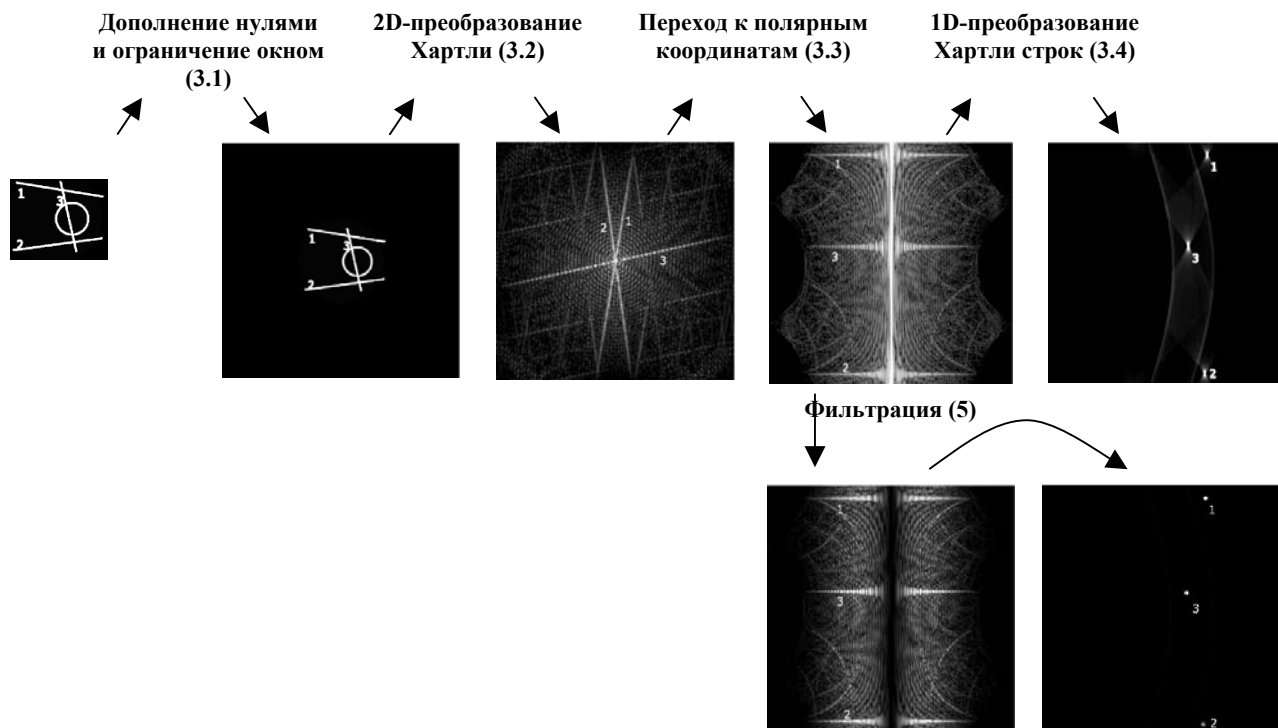


Рис. 3. Блок-схема алгоритма вычисления преобразования Радона через преобразование Хартли. Цифрами отмечены прямые на исходном изображении и их образы при преобразованиях.

Для построения быстрой реализации необходимо свести двумерное ДПХ к одномерным ДПХ столбцов и строк матрицы. Согласно (9)

$$H_{k,l} = \frac{B_{k,l} + B_{k,-l} + B_{-k,l} - B_{-k,-l}}{4} \quad (20)$$

$$B_{k,l} = \sum_{m=0}^{N-1} \text{cas} \frac{2\pi km}{N} \sum_{n=0}^{N-1} I_{m,n} \text{cas} \frac{2\pi nl}{N} \quad (21)$$

$$B_{k+pN,l+qN} = B_{k,l}, \quad p, q \in \mathbf{Z}$$

Таким образом, двумерное ДПХ матрицы $\mathbf{I}_{i,j}$ сводится к одномерным ДПХ столбцов и строк матрицы $\mathbf{I}_{i,j}$ и последующим усреднением по квадрантам матрицы.

Формула (19) предполагает, что начало координат помещено в левый верхний угол матриц $\mathbf{H}_{i,j}$ и $\mathbf{I}_{i,j}$. Для перехода к системе координат с центром в середине матрицы нужно переставить квадранты матрицы $\mathbf{I}_{i,j}$ до преобразования и квадранты матрицы $\mathbf{H}_{i,j}$ после преобразования (Перестановка квадрантов состоит из обмена первого квадранта матрицы с третьим и второго с четвертым).

В итоге получается следующий алгоритм вычисления двумерного ДПХ матрицы изображения $\mathbf{I}_{i,j}$:

Алгоритм 2. Двумерное ДПХ.

1. Переставить квадранты матрицы $\mathbf{I}_{i,j}$ (матрицы изображения).
2. Вычислить матрицу $\mathbf{V}_{i,j}$, которая есть одномерное ДПХ строк и столбцов матрицы $\mathbf{I}_{i,j}$ согласно (21).
3. Сложить элементы $\mathbf{V}_{i,j}$ согласно (20)
4. Переставить квадранты матрицы $\mathbf{H}_{i,j}$.

3.3 Переход к полярным координатам

Согласно пункту 2 Алгоритма 1 преобразование Хартли $\mathbf{H}_{i,j}$ необходимо «развернуть» на полярную плоскость. Полярная СК на изображении такова: полярная ось направлена вправо, угол отсчитывается против часовой стрелки, начало координат помещено в центр (в нулевую частоту). Центр декартовой СК поместим в центр изображения. Обозначим через $P_{l,m}$, $l = 0 \dots L-1$, $m = 0 \dots M-1$ изображение $\mathbf{H}_{i,j}$ в полярных координатах. Элемент $P_{l,m}$ равен интенсивности изображения $\mathbf{H}_{i,j}$ в точке с декартовыми координатами (x, y) :

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

$$\varphi = \frac{L/2-l}{L} \pi, \quad r = \frac{(m-M/2)}{M} N \sqrt{2} \quad (22)$$

$$i = [N/2 - y], \quad j = [x + N/2]$$

N - размер изображения $\mathbf{H}_{i,j}$. Квадратные скобки $[\]$ обозначают целую часть действительного числа. Интенсивность изображения $\mathbf{H}_{i,j}$ в точке (x, y) вычислялась билинейной интерполяцией по интенсивностям четырех пикселей $H_{i,j}, H_{i,j+1}, H_{i+1,j}, H_{i+1,j+1}$.

В отличие от [6] необходимо интерполировать все изображение $\mathbf{H}_{i,j}$, а не только его верхнюю часть, так как $\mathbf{H}_{i,j}$ несимметрично; но интерполяции подвергается только одно изображение, а не действительная и мнимая части изображения из комплексных чисел, как в [6].

При переходе к полярным координатам шаги по углу и радиусу определяются высотой L и шириной M матрицы $\mathbf{P}_{l,m}$:

$$\begin{aligned} d\varphi &= \frac{\pi}{L} \\ dr &= \sqrt{2} \frac{M}{N} \end{aligned} \quad (23)$$

Так как позже необходимо выполнить одномерное преобразование Хартли строк матрицы $\mathbf{P}_{l,m}$, то M должно быть степенью двойки.

Число строк L может быть произвольным, но оно не должно быть слишком маленьким, так как вблизи полюса точки расположены плотно, а на краях изображения редко. При маленьком M в полярных координатах возникают сильные искажения на краях изображения. Условия

$$\begin{cases} L \geq \pi N \\ M \geq N\sqrt{2} \end{cases} \quad (24)$$

гарантируют, что в каждую декартову ячейку (область между четырьмя соседними пикселями $\mathbf{H}_{i,j}$) попадет хотя бы один элемент матрицы $\mathbf{P}_{l,m}$ и интерполяция в полярных координатах будет адекватно представлять изображение в декартовых координатах.

3.4 Одномерное ДПХ по радиусу

Согласно пункту 3 Алгоритма 1 необходимо выполнить одномерное преобразование Хартли строк матрицы $\mathbf{P}_{l,m}$. В соответствии с обсуждением в части 3.2 до и после преобразования необходимо переставить половинки строк, чтобы переместить начало координат в центр изображения.

4. ПРОИЗВОДИТЕЛЬНОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ И ХАРТЛИ

Вычисления выполнялись на машине Intel Pentium III, 800 МГц, ОЗУ 256 Мбайт. Для экспериментальной проверки

быстродействия и сравнения производительности предлагаемого алгоритма и алгоритма из [6] бралось изображение размером 4096x4096 пикселей. Строилась последовательность изображений путём уменьшения стороны этого изображения в два раза и далее. Таким образом, были получены изображения со стороной $N=128, 256, 512, 1024, 2048$ и 4096 пикселей. Для каждого изображения вычислялось преобразование Радона с использованием преобразования Хартли и по методике из [6]. Результаты представлены на рис.4. Видно, что - затраты времени удовлетворяют оценке $O(N^2 \log N)$. Предлагаемый алгоритм быстрее, чем [6] в 3-5 раз, при использованной реализации БПФ [1] и собственной реализации БПХ, которая в основном совпадала с [2], за исключением оптимизации из [2], касающейся уменьшения количества вычислений синуса (вычислительные эксперименты показали, что непосредственное вычисление синуса на процессорах типа Intel P3, P4 зачастую быстрее, чем выполнение умножений и сложений как в [2]).

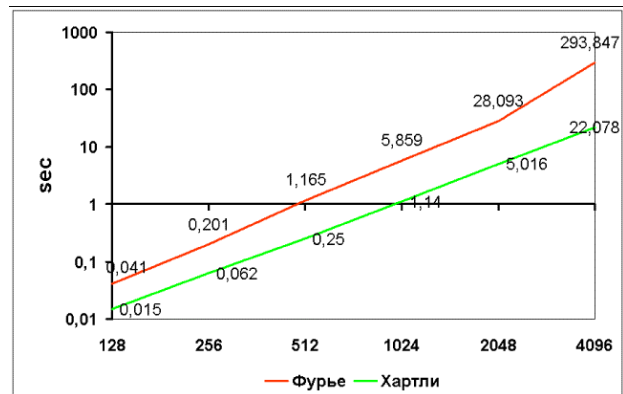


Рис. 4. Зависимость скорости работы преобразования Радона через преобразования Хартли и Фурье от размера изображения.

Требования к памяти приведенного алгоритма в два раза меньше, чем алгоритма из [6], так как преобразование Хартли оперирует действительными числами, а Фурье комплексными.

Для обработки изображения размеров $W \times H$ алгоритму требуется объем памяти $2N^2 \text{sizeof(float)}$, где N - минимальная степень двойки, не меньшая W и H , sizeof(float) размер плавающего числа в байтах (обычно 4 или 8). Половина памяти отводится под исходное изображение, на месте которого вычисляется преобразование Хартли. Вторая половина отводится под преобразование Хартли в полярных координатах, на месте которого вычисляется преобразование Радона. Например, для серого (256 градаций) изображения 1024×1024 требуется 8 Мбайт памяти ($\text{sizeof(float)}=4$).

5. ФИЛЬТРАЦИЯ

Для увеличения контрастности пиков по сравнению с фоном можно выполнить предварительную фильтрацию изображения. Разработано множество фильтров - детекторов краёв [3], которые увеличивают резкость краёв на изображении, а также сглаживают шум. Можно отфильтровать изображение до применения предлагаемого алгоритма, однако есть возможность встроить фильтрацию в алгоритм и не выполнять дважды операции, общие для предлагаемого алгоритма и алгоритма фильтрации.

В общем случае линейная фильтрация изображения $I(x, y)$ заключается в свёртке $I(x, y)$ с некоторой функцией $F(x, y)$, зависящей от требуемых характеристик фильтра. Используя (3), (6) получаем соотношение:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathbf{R}}^{(2)}(I * F)](\rho, \varphi) &= [\hat{\mathbf{H}}^{(1)}G(r, \varphi)](\rho, \varphi) \\ G(r, \varphi) &= G_I(r, \varphi)G_F(r, \varphi) \\ G_I(r, \varphi) &= [\hat{\mathbf{H}}^{(1)}\hat{\mathbf{R}}^{(2)}I(x, y)](r, \varphi) \\ G_F(r, \varphi) &= [\hat{\mathbf{P}}^{(2)}\hat{\mathbf{H}}^{(2)}F(x, y)](r, \varphi) \end{aligned} \quad (25)$$

Пусть $F(x, y)$ является центрально-симметричной. Тогда фильтрация сводится к умножению строк матрицы $\mathbf{P}_{l,m}$ на функцию $G_F(r, \varphi)$, которая не зависит от φ (в силу симметричности $F(x, y)$). Следовательно, каждая строка $\mathbf{P}_{l,m}$ должна быть умножена на одну и ту же функцию $G_F(r, \varphi)$.

Был использован фильтр DoG (Difference of Gaussians), так как он усиливает края на изображении:

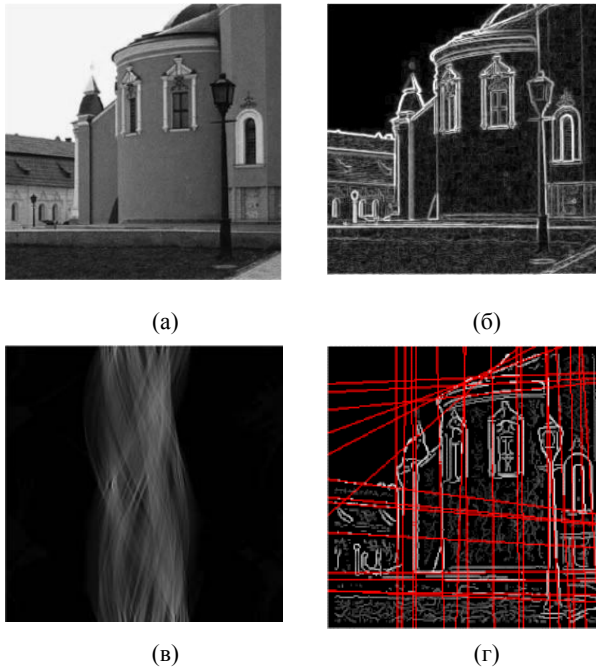


Рис. 5. Применение алгоритма обнаружения прямых к изображению здания. (а)-исходное изображение, (б)-результат детектора краев, (в)-синограмма, (г)-обнаруженные прямые.

Затем по отфильтрованной синограмме вычисляются параметры прямых. Можно видеть, что большинство длинных и ярких прямых линий были обнаружены предлагаемым алгоритмом.

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \sigma_1^2 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \sigma_1^2\right) - \\ &- \sigma_2^2 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \sigma_2^2\right) \end{aligned} \quad (26)$$

σ_1 и σ_2 связаны с параметрами прямых (шириной, извилистостью, яркостью) на изображении, которые будут давать на синограмме резкие максимумы. Исследование этих связей планируется в ближайшем будущем. Пока нами были использованы следующие параметры:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0.5 \dots 10 \\ \sigma_2 &= \frac{\sigma_1}{1.6} \end{aligned} \quad (27)$$

6. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМА К ИЗОБРАЖЕНИЯМ ЗДАНИЙ

На рисунках 5, 6 приведены результаты применения предлагаемого алгоритма к изображениям зданий.

На рис.5 перед вычислением синограммы к изображению применяется детектор краёв, после чего получается его синограмма, по которой восстанавливаются прямые. На рис.6 синограмма вычисляется непосредственно от серого изображения. В связи с этим необходима фильтрация.

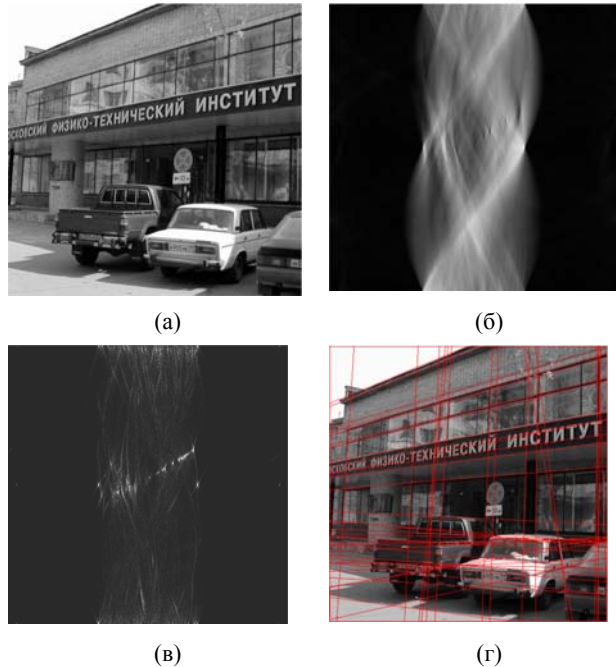


Рис. 6. Применение алгоритма обнаружения прямых к изображению здания. (а)-исходное изображение, (б)-синограмма, (в)-синограмма после фильтрации, (г)-исходное изображение с обнаруженными прямыми.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей статье предложен алгоритм быстрого вычисления преобразования Радона, используя преобразования Харт-

ли. Использование преобразования Хартли вместо преобразования Фурье [6] позволяет уменьшить вдвое объем используемой памяти, так как преобразование Хартли является вещественным. Сложность предложенного алгоритма составляет $O(N \log N)$, как и в [6]. N — число точек на изображении. Сравнение предложенного алгоритма и [6] показало, что достигается выигрыш в производительности не менее, чем в три раза. Это обусловлено тем, что алгоритм обрабатывает меньшее число данных и расположены они компактнее.

8. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 05-07-90344, 05-07-90390 и 06-01-00789.

Авторы выражают благодарность проф. Чатвину и доктору Янгу (Department of Engineering and Design, School of Science and Technology, University of Sussex, UK) за любезно предоставленный отклик статьи [6], доценту ВМиК МГУ к.ф.-м.н. Крылову А.С. и зав. кафедрой СИМ МФТИ проф. Клименко С.В. за проявленное к нашей работе внимание и плодотворные обсуждения.

9. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery, "Numerical Recipes In C: The art of scientific computing.", Cambridge University Press, 1992, pp.504-509, ISBN 0-521-43108-5

[2] Брэйсуэлл Р., "Преобразование Хартли. Теория и приложения", Москва "Мир", 1990, ISBN 5-03-001632-5

[3] Форсайт Дэвид, Понс Жан, "Компьютерное зрение. Современный подход", Издательский Дом "Вильямс", 2004, ISBN 0-13-085198-1

[4] Princen J.P., Illingworth, J. and Kittler, J.V., "A Formal Definition of the Hough Transform: Properties and Relationships", Journal of Mathematical Imaging and Vision, 1992, vol.1, num.1, pp.153-168

[5] Toft P.A., "The Radon Transform: Theory and Implementation", PhD Thesis, Technical University of Denmark, 1996

[6] Cheyne Gaw Ho, Rupert C. D. Young, Chris D. Bradfield, Chris R. Chatwin, "A Fast Hough Transform for the Parametrisation of Straight Lines using Fourier Methods", Real-Time Imaging, 2000, vol.6, num.2, pp.113-127

<http://dx.doi.org/10.1006/rtim.1999.0182>

[7] D.L. Donoho and X. Huo, "Beamlets and multiscale image analysis", <http://www-stat.stanford.edu/donoho/Reports/http://citeseer.ist.psu.edu/donoho01beamlets.html>

[8] David Donoho and Xiaoming Huo, "Applications of Beamlets to Detection and Extraction of Lines, Curves and Objects in Very Noisy Images", <http://citeseer.ist.psu.edu/446366.html>

Об авторах

Волегов Дмитрий Борисович – студент ФОПФ Московского Физико-Технического Института, кафедра СИМ. Телефон: +7-(916)-932-6441 E-mail: dvolegov@rambler.ru

Гусев Виктор Викторович – студент факультета вычислительной математики и кибернетики Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Телефон: +7-(926)-561-2766 E-mail: tassadar@inbox.ru

Юрин Дмитрий Владимирович – кандидат физ.-мат. наук, ФГУП НПП ОПТЭКС (Федеральное Государственное Унитарное Предприятие Научно-Производственное Предприятие "Опτικο-электронные комплексы и системы"), главный специалист; с.н.с. кафедры Математической физики ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова

Телефон: +7-(916)-387-7367, +7-(495)-535-4887

E-mail: yurin_d@inbox.ru

Straight Line Detection on Images via Hartley Transform. Fast Hough Transform

Abstract

The fast Hough transform algorithm is proposed based on the fast Hartley transform. The algorithm proposed is based on equivalence of Hough transform for straight lines and Radon transform. The usage of Hartley transform instead of Fourier results in reducing by factor of two memory required for calculations and in speedup the transform calculation. The comparison of speed of the fast Hough transform on the base of the Hartley and Fourier [6] transforms is presented.

Keywords: Hough transform, Radon transform, Hartley transform, straight line detection, feature detection, image filtering.

About the authors

Dmitry B. Volegov is a student at Moscow Institute of Physics and Technology, Department of General and Applied Physics, sub-faculty of SIM. His contact email is dvolegov@rambler.ru.

Victor V. Gusev is a student at Moscow State University, Department of Computational Mathematics and Cybernetics, sub-faculty of Mathematical physics. His contact email is tassadar@inbox.ru.

Dmitry V. Yurin, PhD, is a chief specialist of FGUP RPE OPTECS (The Federal State Unitary Enterprise Research and Production Enterprise "Optoelectronic Complexes and Systems") and a senior researcher at Moscow State University, Department of Computational Mathematics and Cybernetics. His contact email is yurin_d@inbox.ru.