

Скелет многоугольной фигуры – представление плоским прямолинейным графом

Леонид Местецкий

Кафедра математических методов прогнозирования,
Московский Государственный университет имени М.В. Ломоносова, Ленинские горы, Москва, Россия
l.mest@ru.net

Аннотация:

Предлагается новый метод представления скелета многоугольной фигуры в виде плоского графа, рёбрами которого являются кривые Безье первого и второго порядка. Приводится описание радиальной функции скелета сплайнами Безье. Такое представление позволяет описать криволинейный в общем случае скелет многоугольной фигуры с помощью так называемого прямолинейного контрольного графа, составленного из характеристических многоугольников кривых Безье. Скелет вместе с радиальной функцией предоставляет альтернативный способ описания фигуры в виде объединения семейства кругов.

Ключевые слова: многоугольная фигура, скелет, диаграмма Вороного, радиальная функция, параболические рёбра, кривые Безье, контрольный граф.

1. ВВЕДЕНИЕ

Многоугольная фигура – это замкнутая область на плоскости, граница которой состоит из конечного числа простых непересекающихся многоугольников. Скелет многоугольной фигуры – это серединные оси фигуры, множество точек, имеющих не менее двух ближайших граничных точек фигуры. Многоугольные фигуры и их скелеты широко используются в компьютерной графике, анализе и распознавании формы изображений (Siddiqi, Pizer, 2008, Местецкий, 2009).

Методы построения скелета многоугольной фигуры обычно используют концепцию диаграммы Вороного линейных сегментов. Для множества отрезков, составляющих границу фигуры, строится диаграмма Вороного, из которой далее выделяется скелет. Скелет многоугольной фигуры, имеющей n вершин, может быть получен за время $O(n)$ из диаграммы Вороного. В свою очередь, известны эффективные $O(n \log n)$ алгоритмы построения диаграммы Вороного для множества линейных сегментов общего вида (Fortune, 1987, Yip, 1987), а также для сегментов, образованных сторонами простого многоугольника (Lee, 1982) или многосвязной многоугольной фигуры (Mestetskiy, 2009).

Геометрическая конструкция скелета многоугольной фигуры выглядит достаточно просто: она имеет вид плоского графа, рёбра которого состоят из отрезков прямых и парабол (рис.1).

Из-за присутствия в скелете параболических рёбер возникают некоторые технические неудобства при построении скелета, а также при его хранении и использовании для анализа и распознавания изображений.

Неявные уравнения парабол включают квадратичные формы общего вида, что является неудобным для рисования и анализа. При хранении данных о скелете приходится запоминать фокусы и директриссы параболических рёбер для вычисления уравнений в ходе обработки. Кроме того, неявное уравнение параболы задаёт всю бесконечную кривую, а в скелет входит лишь её конечный фрагмент. Выделение этого фрагмента также создаёт определённые трудности.

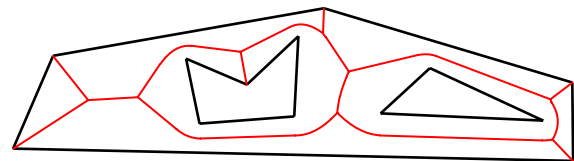


Рис.1. Многоугольная фигура и её скелет.

Эти неудобства порождают стремление создать альтернативный скелет без параболических рёбер. Такой подход реализован в концепции «прямолинейного скелета» (Aichholzer, Aurenhammer, 1996). Но прямолинейный скелет имеет свои недостатки: сложность математического определения, низкая эффективность алгоритмов построения, сложность регуляризации при наличии шумовых эффектов. Эти недостатки явно превосходят по своим масштабам проблему вычисления парабол в обычном скелете.

В настоящей статье предлагается другой способ описания скелета в виде прямолинейного графа, не требующий получения уравнений параболических рёбер ни на этапе построения диаграммы Вороного, ни при хранении, рисовании и обработке. Достигается это следующим образом.

1. Скелет многоугольной фигуры представляется объединением некоторого множества элементарных кривых Безье первой и второй степени. Это объединение мы называем составной кривой Безье.
2. Составная кривая Безье определяется своим контрольным графом, который образуется из характеристических многоугольников элементарных кривых Безье. Контрольный граф имеет прямолинейные рёбра.

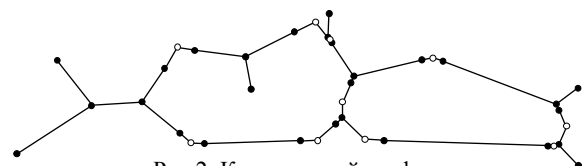


Рис.2. Контрольный граф скелета.

Таким образом, описание скелета, которое используется для его хранения и обработки, представляет собой прямолинейный граф. На рис.2 изображён контрольный граф скелета фигуры из рис.1. Множество вершин контрольного

графа состоит из двух подмножеств. Первое подмножество (чёрные точки) – это вершины скелета многоугольной фигуры. А второе подмножество (белые точки) – это управляющие вершины кривых Безье второго порядка.

Для того, чтобы построить такое представление скелета, мы покажем, что параболические сегменты скелета описываются кривыми Безье второй степени и опишем алгоритм получения этого представления. Далее мы покажем, что радиальная функция скелета вычисляется также с помощью сплайнов Безье.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00670).

2. СТРУКТУРА СКЕЛЕТА

Пусть задана многоугольная фигура M на плоскости R^2 с евклидовым расстоянием $d(p, q)$, $p, q \in R^2$. Граница фигуры ∂M состоит из нескольких простых многоугольников.

Пустым кругом фигуры M с центром в точке p и радиусом $r \geq 0$ называется замкнутое множество точек $K_r(p) = \{q : q \in R^2, d(p, q) \leq r\}$ такое, что $K_r(p) \subset M$.

Максимальным пустым кругом (или вписанным кругом) $K_r^{\max}(p)$ фигуры M называется пустой круг, который не содержится ни в каком другом пустом круге. Очевидно, что не всякая точка фигуры M является центром максимального пустого круга.

Скелетом S фигуры M называется множество всех точек центров её максимальных пустых кругов

$$S = \{p : p \in M, K_r^{\max}(p) \neq \emptyset\}.$$

Это определение скелета является более точным, чем то, что приведено выше во введении (через понятие серединных осей), поскольку оно включает в скелет все выпуклые вершины фигуры. Согласно определению, данному выше, каждую точку фигуры можно рассматривать как пустой круг нулевого радиуса. При этом вырожденные круги с центрами в выпуклых вершинах фигуры являются максимальными пустыми кругами, поскольку не содержатся в других пустых кругах. Следовательно, в скелет многоугольной фигуры входят точки, которые совпадают с выпуклыми вершинами многоугольной фигуры.

В каждой точке скелета определена радиальная функция, равная радиусу вписанного круга с центром в этой точке. Радиальная функция задаёт «ширину» фигуры относительно точек скелета.

Пусть S – скелет многоугольной фигуры M . Общее число точек, составляющих множество S , бесконечно. Тем не менее, оказывается, что все эти точки лежат на конечном множестве отрезков прямых линий и квадратичных парабол.

Пусть $s \in S$ – точка скелета, а g_1 и g_2 – две ближайшие к ней граничные точки фигуры, $g_1, g_2 \in \partial M$. Точки g_1 и

g_2 могут занимать различное положение на границе фигуры. Будем называть граничную точку угловой, если она является вершиной многоугольной фигуры, и простой в остальных случаях. Возможны три варианта сочетания типов точек g_1 и g_2 : пара угловых, пара простых или пара из угловой и простой точек.

В случае, когда обе точки g_1 и g_2 угловые, точка $s \in S$, равноудалённая от g_1 и g_2 , обязательно должна лежать на прямой, являющейся серединным перпендикуляром для отрезка $[g_1, g_2]$ (рис.3a).

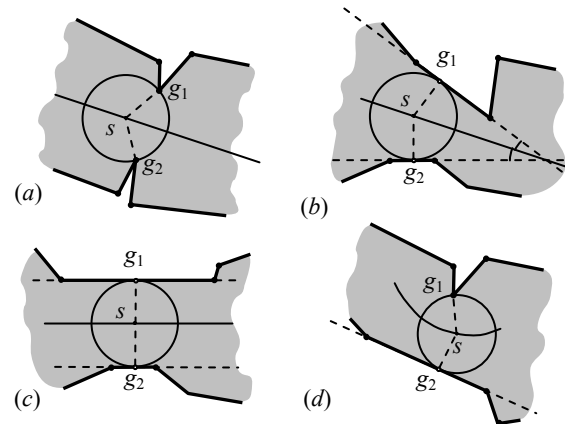


Рис. 3: Бисекторы многоугольной фигуры.

Если обе точки g_1 и g_2 простые, то точка s равноудалена от сторон многоугольника, содержащих g_1 и g_2 . Значит, точка s лежит на биссектрисе угла, образованного этими сторонами (рис.3b). Если же стороны параллельны, то s лежит на прямой линии, равноудалённой от этих сторон (рис.3c).

Наконец в случае, когда пара g_1, g_2 состоит из угловой и простой точек, точка s равноудалена от угловой точки и от стороны многоугольника, содержащей простую точку. Это значит, что s лежит на параболе, для которой фокусом является угловая точка, а директрисой – сторона многоугольника, на которой лежит точка g_2 (рис.3d).

Таким образом, все точки скелета лежат на указанных линиях трёх перечисленных типов, определяемых парами «вершина-вершина», «сторона-сторона» и «вершина-сторона» фигуры.

Для общности будем называть вершины и стороны многоугольной фигуры сайтами. Будем также называть бисектором максимальное связанное подмножество точек скелета, равноудалённых от одной и той же пары сайтов. В зависимости от пары определяющих сайтов бисекторы будем называть: vv -бисектор для пары «вершина-вершина», ss -бисектор для пары «сторона-сторона» и vs -бисектор для пары «вершина-сторона».

Скелет многоугольной фигуры можно рассматривать как плоский граф, рёбрами которого являются бисекторы, а вершинами – концевые точки бисекторов. Вершины графа – это точки соединения бисекторов между собой и выпуклые вершины фигуры.

3. ВЕРШИНЫ СКЕЛЕТА

Вершинами скелета являются центры максимальных пустых кругов, касающихся трёх или более сайтов. Поэтому задача поиска вершин может быть решена путем построения касательных окружностей для троек сайтов. Вычисление таких кругов приводит к следующим геометрическим задачам (рис. 4).

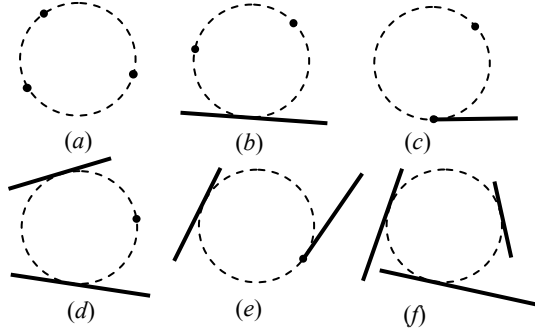


Рис.4. Касательные окружности для различных троек сайтов.

Возможные комбинации сайтов:

- 1) три сайта-точки (рис.4a);
- 2) два сайта-точки и один сайт-сегмент (рис.4b,c);
- 3) два сайта-сегмента и один сайт-точка. (рис.4d,e);
- 4) три сайта-сегмента (рис.4f).

Во второй и третьей комбинациях возможны два варианта, в зависимости от того, совпадают ли точки с концами сегментов.

Если последовательность точек касания задана и касательная окружность существует, то она единственна.

Непосредственное вычисление центра касательной окружности t трёх сайтов S_1, S_2, S_3 осуществляется на основе решения системы из двух уравнений, составленной из следующих условий:

$$\begin{cases} d^2(t, s_1) = d^2(t, s_2) \\ d^2(t, s_1) = d^2(t, s_3) \end{cases}$$

В ситуациях, изображённых на рис.4a,c,e,f оба уравнения являются линейными. А в случаях на рис.4b,d одно уравнение линейное, а другое имеет вторую степень. Выразив одну координату точки t через другую из линейного уравнения, можно привести второе уравнение к обычному квадратному уравнению. Полученное решение должно удовлетворять двум дополнительным условиям, которые легко проверяются. Первое условие состоит в том, что проекции найденной точки t на сайты-сегменты должны лежать на самих сегментах. Второе условие выражается в том, что касательная окружность должна лежать внутри фигуры и, следовательно, центр её t лежит слева от сайта-сегмента.

Таким образом, вычисление вершин скелета для многоугольной фигуры сводится к комбинаторному перебору различных троек сайтов и вычислению для них касательных окружностей. Для решения этой задачи известны как простые наивные алгоритмы, имеющие высокую вычислительную

сложность, так и более сложные алгоритмы, осуществляющие направленный перебор троек весьма эффективно, обеспечивая вычислительную сложность $O(n \log n)$.

4. РЕБРА СКЕЛЕТА

Как уже отмечалось выше, непосредственное вычисление параболических рёбер в виде неявного уравнения второй степени не очень удобно для рисования её средствами компьютерной графики и для анализа скелета при решении задач преобразования и распознавания изображений.

Для работы с параболическими рёбрами скелета гораздо более удобным представляется их описание в виде параметрических кривых вида $V(t) = (x(t), y(t)), t \in [0,1]$, где точки $V(0)$ и $V(1)$ – это вершины скелета, являющиеся концами ребра. Такое параметрическое описание предлагается получить с помощью кривых Безье.

Кривая Безье степени m – это параметрическая линия вида

$$V(t) = \sum_{j=0}^m V_j B_j^m(t), \text{ с параметром } t \in [0,1], \text{ где}$$

$V = \{V_0, V_1, \dots, V_m\}$ упорядоченное множество опорных точек, называемое *характеристическим многоугольником*

кривой Безье, а $B_j^m(t) = \frac{m!}{(m-j)!j!} (1-t)^{m-j} t^j$,

$j = 0, \dots, m$ – полиномы Бернштейна. Точки V_0, V_m

называются *концевыми*, а точки V_1, \dots, V_{m-1}

управляющими.

Идея предлагаемого нами решения состоит в представлении линейных рёбер скелета кривыми Безье первого порядка

$$V(t) = V_0 B_0^1(t) + V_1 B_1^1(t), \quad t \in [0,1],$$

а параболических рёбер – кривыми Безье второго порядка $V(t) = V_0 B_0^2(t) + V_1 B_1^2(t) + V_2 B_2^2(t), t \in [0,1]$.

Характеристический многоугольник кривой Безье первого порядка имеет две вершины V_0 и V_1 , являющиеся

вершинами скелета. Характеристический многоугольник кривой второго порядка имеет три вершины $V = \{V_0, V_1, V_2\}$. При этом концевые точки ребра V_0 и V_2

– это вершины скелета, а точка V_1 – управляющая (или

виртуальная) вершина кривой Безье. Такой способ описания

рёбер является компактным, так как дополнительно к

концевым точкам всех рёбер, являющихся вершинами

скелета, нужно для каждого параболического ребра

запоминать лишь одну управляющую точку. Кроме того, существенно упрощается рисование и обработка рёбер,

поскольку для кривых Безье имеются эффективные алгоритмы решения этих задач.

Для реализации предлагаемой идеи необходимо уметь вычислять управляющие точки параболических рёбер.

Параболическое ребро скелета представляет собой *vs*-бисектор. Пусть A и B – пара сайтов, задающих этот бисектор, причём A – это вершина, а B – сторона многоугольной фигуры. Сторона B – это отрезок, соединяющий вершины фигуры B_1 и B_2 . Мы будем обозначать B_1B_2 сам отрезок и прямую, на которой он лежит. Не нарушая общности, предположим, что многоугольная фигура находится слева от стороны B_1B_2 . Опустим перпендикуляр AD из точки A на прямую B_1B_2 и выберем точку O как середину AD . С парой сайтов A и B свяжем прямоугольную декартову систему координат с центром O , осью абсцисс параллельной B_1B_2 и осью ординат DA и (рис.5).

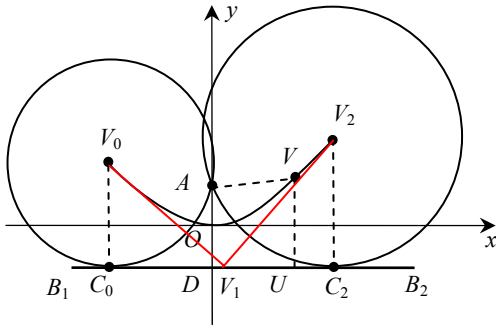


Рис.5. Параболическая кривая *vs*-бисектора.

Бисектор, определяемый парой сайтов A и B , является линией центров кругов, проходящих через точку A , для которых прямая B_1B_2 является касательной (рис.5). Обозначим концевые точки этого бисектора V_0 и V_2 . Пусть C_0 и C_2 проекции V_0 и V_2 на прямую B_1B_2 .

Пусть V точка на бисекторе и U её ортогональная проекция на $[B_1, B_2]$. Тогда длины отрезков AV и UV равны. Если координаты точки $V = (x, y)$, а координаты точки $A = (0, p)$, то из условия $AV^2 = UV^2$ получаем $x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$. Отсюда получаем уравнение параболы для бисектора $y = \frac{1}{4p}x^2$.

Рассмотрим касательные параболы в точках $V_0 = (x_0, y_0)$ и $V_2 = (x_2, y_2)$.

Как известно, уравнение касательной к кривой $F(x, y) = 0$, в точке (\hat{x}, \hat{y}) имеет вид

$$F'_x(\hat{x}, \hat{y}) \cdot (x - \hat{x}) + F'_y(\hat{x}, \hat{y}) \cdot (y - \hat{y}) = 0.$$

В нашем случае $F(x, y) = x^2 - 4py$, поэтому уравнения касательных к кривой $x^2 - 4py = 0$ в точках V_0 и V_2 есть

$$2x_0 \cdot (x - x_0) - 4p \cdot (y - y_0) = 0, \quad (1)$$

$$2x_2 \cdot (x - x_2) - 4p \cdot (y - y_2) = 0. \quad (2)$$

Следовательно, точка пересечения этих касательных может быть найдена из системы уравнений:

$$\begin{cases} x_0x - 2py = x_0^2 - 2py_0 \\ x_2x - 2py = x_2^2 - 2py_2 \end{cases}$$

С учётом того, что

$$y_0 = \frac{1}{4p}x_0^2, \quad y_2 = \frac{1}{4p}x_2^2, \quad (3)$$

получаем решение этой системы

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + x_2), \quad (4)$$

$$y_1 = \frac{1}{4p}x_0x_2. \quad (5)$$

Таким образом, мы получили точку пересечения касательных $V_1 = (x_1, y_1)$ (рис.5).

Рассмотрим кривую Безье второго порядка

$V(t) = V_0B_0^2(t) + V_1B_1^2(t) + V_2B_2^2(t)$, $t \in [0, 1]$, заданную характеристическим треугольником с вершинами $\{V_0, V_1, V_2\}$. Полиномы Бернштейна $B_j^m(t)$ при $m = 2$ есть $B_0^2(t) = (1 - t)^2$, $B_1^2(t) = 2t(1 - t)$, $B_2^2(t) = t^2$. Тогда параметрические уравнения для кривой Безье $V(t)$ имеют следующий вид:

$$x(t) = (x_0 - 2x_1 + x_2)t^2 - 2(x_0 - x_1)t + x_0, \quad (6)$$

$$y(t) = (y_0 - 2y_1 + y_2)t^2 - 2(y_0 - y_1)t + y_0, \quad (7)$$

$$t \in [0, 1].$$

Из (4) и (6) следует

$$x(t) = x_0 + (x_2 - x_0) \cdot t. \quad (8)$$

А из (7), (3) и (5) получаем

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4p}[(x_0^2 - 2x_0x_2 + x_2^2)t^2 - 2(x_0^2 - x_0x_2)t + x_0^2] = \\ &= \frac{1}{4p}[(x_0 - x_2)^2 \cdot t^2 - 2x_0(x_0 - x_2)t + x_0^2] = \\ &= \frac{1}{4p}[(x_0 - x_2)t - x_0]^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что координаты точки кривой Безье связаны уравнением $y(t) = \frac{1}{4p} [x(t)]^2$. А это совпадает с уравнением параболы, задающим бисектор.

Таким образом, получена искомая простая форма описания бисектора в виде кривой Безье. Это кривая второго порядка, которая задаётся характеристическим треугольником. Две его вершины – это концевые точки бисектора, а третья вершина – это точка пересечения касательных к бисектору в концевых точках.

Следовательно, для того, чтобы задать бисектор в виде кривой Безье, необходимо вычислить касательные в концевых точках бисектора и найти их пересечение. Рассмотрим решение этой задачи.

5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК ПАРАБОЛИЧЕСКОГО РЕБРА

Сначала покажем, что касательная к параболе в любой её точке ортогональна вектору, направленному из фокуса параболы в проекцию этой точки на директрису (рис.6).

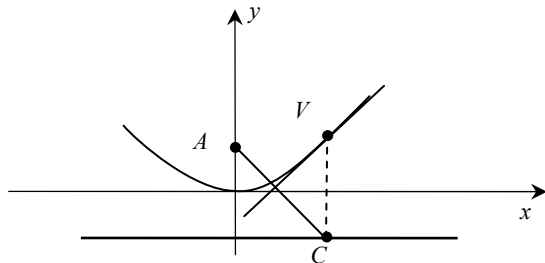


Рис.6. Ортогональность касательной и направления из фокуса в точку проекции.

Уравнение касательной к параболе $x^2 - 4py = 0$ в точке $V = (\hat{x}, \hat{y})$ есть:

$$2\hat{x} \cdot (x - \hat{x}) - 4p \cdot (y - \hat{y}) = 0.$$

А вектор из фокуса параболы $A = (0, p)$ в точку $C = (\hat{x}, -p)$, являющуюся проекцией точки $V = (\hat{x}, \hat{y})$ на директрису параболы $y = -p$, есть $\overrightarrow{AC} = (\hat{x}, -2p)$.

Нетрудно заметить, что вектор \overrightarrow{AC} и направляющий вектор касательной $(2\hat{x}, -4p)$ являются коллинеарными.

Это свойство позволяет вычислить касательные в концевых точках V_0 и V_2 параболического ребра скелета. Для этого нужно сначала найти проекции C_0 и C_2 точек V_0 и V_2 на прямую B_1B_2 . А затем вычислить нормали соответствующих касательных – вектора $\overrightarrow{AC_0}$ и $\overrightarrow{AC_2}$.

Исходной информацией для определения касательных к бисектору в его концевых точках служат следующие данные. Известны концевые точки бисектора $V_0 = (x_0, y_0)$ и

$V_2 = (x_2, y_2)$, а также пара сайтов A и B , причём один сайт – это вершина, а другой – сторона многоугольной фигуры. Для определённости будем считать, что A это вершина, а B сторона, имеющая вершины B_1 и B_2 , причём многоугольник лежит слева от этой стороны. Задача состоит в том, чтобы найти виртуальную вершину V_1 характеристического треугольника $\{V_0, V_1, V_2\}$.

В описании алгоритма приняты следующие обозначения:

\overrightarrow{PQ} - вектор с началом P и концом Q ;

$[\overrightarrow{P_1Q_1} \times \overrightarrow{P_2Q_2}]$ - векторное произведение;

$(\overrightarrow{P_1Q_1}, \overrightarrow{P_2Q_2})$ - скалярное произведение;

$V + \overrightarrow{PQ}$ - сдвиг точки V на вектор \overrightarrow{PQ} ;

$|\overrightarrow{PQ}|$ - модуль вектора.

Алгоритм решения этой задачи следующий.

1. Вычислить параметр p параболы:

$$p = \frac{[\overrightarrow{B_1B_2} \times \overrightarrow{B_1A}]}{2 \cdot |\overrightarrow{B_1B_2}|}.$$

2. Вычислить точки C_0 и C_2 - проекции точек V_0 и V_2 на B :

$$C_0 = B_1 + \overrightarrow{B_1B_2} \cdot \frac{(\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_1V_0})}{|\overrightarrow{B_1B_2}|},$$

$$C_2 = B_1 + \overrightarrow{B_1B_2} \cdot \frac{(\overrightarrow{B_1B_2}, \overrightarrow{B_1V_2})}{|\overrightarrow{B_1B_2}|}.$$

3. Вычислить вектора $\overrightarrow{AC_0}$ и $\overrightarrow{AC_2}$:

$$\overrightarrow{AC_0} = (a, b), \quad \overrightarrow{AC_2} = (c, d).$$

(a, b) - координаты вектора $\overrightarrow{AC_0}$,

(c, d) - координаты вектора $\overrightarrow{AC_2}$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) = 0 \\ c \cdot (x - x_2) + d \cdot (y - y_2) = 0 \end{cases}$$

5. Решение системы даёт координаты виртуальной точки кривой Безье $V_1 = (x_1, y_1)$, описывающей ребро скелета.

Таким образом, характеристический граф кривой Безье, представляющей параболическое ребро скелета, описывается

тройкой $\{V_0, V_1, V_2\}$, условно называемой характеристическим треугольником.

6. СКЕЛЕТНЫЙ ГРАФ ИЗ КРИВЫХ БЕЗЬЕ

Мы показали, что весь скелет многоугольной фигуры есть объединение кривых Безье первого и второго порядка. Это объединение будем называть составной кривой Безье. Такой термин используется в шрифтовом дизайне. Там составные кривые Безье описывают замкнутые контуры символов шрифта. В нашем случае кривые описывают более сложную структуру – связный плоский граф.

Характеристические многоугольники кривых Безье имеют прямолинейные рёбра. Объединение характеристических многоугольников всех рёбер скелета будем называть *контрольным графом* полученной составной кривой, или *контрольным графом скелета* многоугольной фигуры. Пример контрольного графа представлен на рис.2.

Важным свойством контрольного графа скелета является его планарность, которая доказывается следующим образом. Рассмотрим образующие сайты параболического ребра: сайт-точку A и сайт-сегмент B .

Если V_0 и V_2 лежат по одну сторону от оси Y , т.е. x_0 и x_2 имеют одинаковый знак, то из (5) следует, что $y_1 \geq 0$ и тогда точка V_1 лежит выше сегмента B .

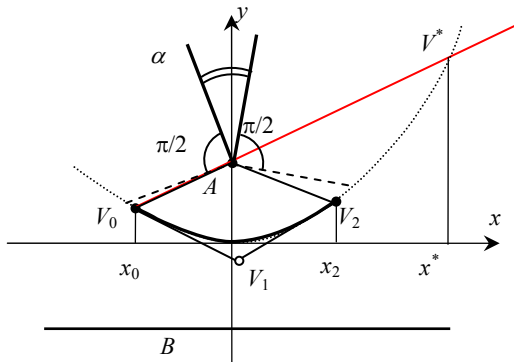


Рис 7: Планарность характеристического графа

Предположим теперь, что x_0 и x_2 имеют разные знаки (рис.7). Поскольку фокус параболы A – это вогнутая вершина многоугольной фигуры, то угол α , образованный инцидентными этой вершине сторонами, лежит в диапазоне $\pi < \alpha < 2\pi$. Рассмотрим угол $\angle V_0AV_2$ между векторами $\overrightarrow{AV_0}$ и $\overrightarrow{AV_2}$. Очевидно, что

$$\angle V_0AV_2 \leq 2\pi - \left(\alpha + 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \pi - \alpha < \pi.$$

Следовательно, существует прямая, проходящая через фокус A , такая, что точки V_0 и V_2 лежат ниже неё. Она

пересекает параболу в точках $P = (x_p, y_p)$ и $Q = (x_q, y_q)$, причём

$$x_p < x_0, \quad x_q > x_2. \quad (10)$$

Уравнение прямой PQ имеет вид $y = p + a \cdot x$, где a угловой коэффициент. Точки пересечения прямой с параболой определяются из уравнения $p + ax = \frac{1}{4p}x^2$. Это квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_p = 2p \cdot \left(a - \sqrt{a^2 + 1} \right), \quad x_q = 2p \cdot \left(a + \sqrt{a^2 + 1} \right).$$

Точка пересечения касательных V_1 имеет ординату y_1 . Из уравнения (5) и условий (10) получаем следующую оценку

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{4p}x_0x_2 < \frac{1}{4p}x_px_q^* = \frac{1}{4p}x_0x_2 = \\ &= \frac{1}{4p} \left[2p \cdot \left(a - \sqrt{a^2 + 1} \right) \right] \cdot \left[2p \cdot \left(a + \sqrt{a^2 + 1} \right) \right] = \\ &= \frac{1}{4p} 4p^2 \cdot \left[a^2 - (a^2 + 1) \right] = -p. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что точка V_1 лежит слева от сайта-сегмента B , с той же стороны, что и сайт A и точки V_0 и V_2 , т.е. $\overrightarrow{AV_0}$ и $\overrightarrow{AV_2}$ не пересекают B .

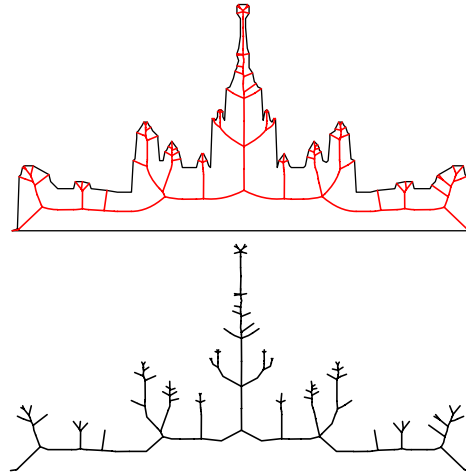


Рис.8: Многоугольная фигура и её скелет.

Таким образом, получаем, что характеристический треугольник параболического ребра не имеет точек пересечения со своим определяющим сайтом-сегментом и лежит внутри объединения пустых кругов с центрами на параболическом сегменте. Следовательно, стороны характеристического треугольника не имеют пересечений и с

остальными рёбрами контрольного графа. А это значит, что контрольный граф скелета является планарным.

Пример контрольного графа фигуры приведен на рис. 8. Фигура представляет собой 75-угольник, её скелет имеет 147 рёбер, а контрольный граф имеет 190 вершин, в том числе 43 виртуальных.

7. РАДИАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ СКЕЛЕТА

Радиальная функция скелета фигуры ставит в соответствие каждой точке скелета радиус вписанного пустого круга с центром в этой точке. Рассмотрим, каким образом можно представить радиальную функцию в случае, когда скелетный граф описан в виде составной кривой Безье.

С концевыми точками V_0 и V_1 линейного ss -бисектора связаны максимальные пустые круги, радиусы которых r_0 и r_1 известны. Очевидно, что радиус $r(t)$ пустого круга с центром в точке $V(t) = V_0 \cdot (1-t) + V_1 \cdot t$, лежащей на ребре V_0V_1 , определяется как

$$r(t) = r_0 \cdot (1-t) + r_1 \cdot t. \quad (10)$$

Таким образом, формула для вычисления радиуса круга имеет тот же самый вид, что и формула для вычисления точки на бисекторе, являющейся центром круга.

Рассмотрим случай vs -бисектора. Здесь мы тоже хотим для точки $V(t)$ получить выражение

$$r(t) = r_0 B_0^2(t) + r_1 B_1^2(t) + r_2 B_2^2(t), \quad (11)$$

где r_0 и r_2 - радиусы максимальных пустых кругов с центрами в концевых точках бисектора V_0 и V_2 , а r_1 радиус «виртуального круга», который мы хотели бы приписать виртуальной точке кривой Безье V_1 .

В выбранной нами местной системе координат для пары сайтов A и B имеет место простое соотношение между радиусами кругов и ординатами точек бисектора $r(t) = y(t) + p$ (рис.7). Поскольку для полиномов Бернштейна справедливо тождество

$$B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t) = 1, \text{ на основе этого получаем:}$$

$$\begin{aligned} r(t) &= y_0 B_0^2(t) + y_1 B_1^2(t) + y_2 B_2^2(t) + p = \\ &= (y_0 + p) \cdot B_0^2(t) + (y_1 + p) \cdot B_1^2(t) + (y_2 + p) \cdot B_2^2(t) = \\ &= r_0 \cdot B_0^2(t) + (y_1 + p) \cdot B_1^2(t) + r_2 \cdot B_2^2(t). \end{aligned} \quad (12)$$

Сравнивая выражения (11) и (12) для $r(t)$, имеем $r_1 = y_1 + p$.

Поскольку $r_1 = y_1 + p = y_1 - (-p)$, из геометрических соображений получаем, что r_1 есть расстояние от точки V_1 до сайта-сегмента, взятое со знаком. В терминах алгоритма

вычисления управляющей точки кривой Безье, описанного в разделе 5, получаем:

$$r_1 = \frac{[\overrightarrow{B_1 B_2} \times \overrightarrow{B_1 V_1}]}{|\overrightarrow{B_1 B_2}|}. \quad (13)$$

Таким образом, для радиуса круга с центром на параболическом бисекторе также получена простая формула такого же типа, как и для вычисления самой точки на бисекторе.

Как видно из (10), (11), для того, чтобы обеспечить возможность вычисления радиальной функции для любой точки ss -бисектора и vs -бисектора, в структуре данных скелета достаточно сохранить радиусы всех кругов с центрами в вершинах контрольного графа. При этом радиусы кругов с центрами в контрольных вершинах параболических рёбер вычисляются по формуле (13).

Однако для бисекторов третьего типа (vv -бисекторов) представление радиальной функции скелета в форме сплайнов Безье получено быть не может. Несмотря на это найденное описание ss -бисекторов и vs -бисекторов в виде (10)-(11) оказывается достаточным для весьма полезного представления фигуры в виде объединения множества пустых кругов.

Действительно, объединение всех максимальных пустых кругов с центрами на ss - и vs -бисекторах и радиусами, определяемыми их радиальными функциями, покрывают полностью фигуру. Это значит, что зная скелет фигуры и её радиальную функцию для ss - и vs -бисекторов, можно восстановить фигуру путём построения огибающей этого семейства кругов.

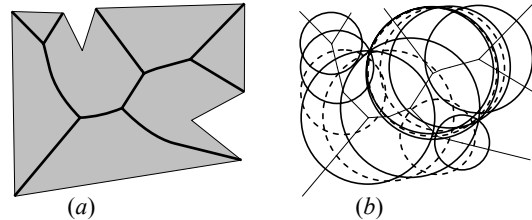


Рис 9: Многоугольная фигура и её скелет (a), контрольный граф и контрольные диски радиальной функции (b).

Пример на рис.9 демонстрирует многоугольную фигуру и её скелет (a), а также контрольный граф скелета с контрольными дисками (b).

8. ВИЗУАЛИЗАЦИЯ СКЕЛЕТА

Полученное представление скелета многоугольной фигуры в виде плоского графа, составленного из кривых Безье первой и второй степени является удобным средством для визуализации, хранения и анализа формы изображений.

Визуализация скелета может быть выполнена с помощью стандартных графических программ рисования линейных отрезков и кривых Безье. Обычно в графических библиотеках используется рисование кривых Безье третьей степени, как наиболее распространённого типа кривых. Для того, чтобы воспользоваться такими программами при изображении кривой второй степени, нужно применить известное

преобразование их характеристических многоугольников. Кривая Безье второй степени с характеристическим треугольником $\{V_0, V_1, V_2\}$ совпадает с кривой Безье третьей степени с характеристическим четырёхугольником $\{W_0, W_1, W_2, W_3\}$, у которого вершины определены следующим образом:

$$W_0 = V_0, W_1 = V_0 \cdot \frac{1}{3} + V_1 \cdot \frac{2}{3}, W_2 = V_1 \cdot \frac{2}{3} + V_2 \cdot \frac{1}{3}, W_3 = V_2.$$

Получив четырёхугольник $\{W_0, W_1, W_2, W_3\}$, можно изобразить кривую Безье третьего порядка $W(t) = W_0 B_0^3(t) + W_1 B_1^3(t) + W_2 B_2^3(t) + W_3 B_3^3(t)$, совпадающую с кривой второго порядка $V(t) = V_0 B_0^2(t) + V_1 B_1^2(t) + V_2 B_2^2(t)$.

Использование представления многоугольной фигуры в виде объединения семейства всех её максимальных пустых кругов позволяет рассматривать фигуру в качестве гибкого объекта и осуществлять над ней некоторые полезные преобразования по изменению формы. Например, можно изменить фигуру, увеличить или уменьшить её ширину за счёт изменения радиусов и положения контрольных кругов скелетного графа. Пример такого преобразования фигуры (силуэт быка переходит в силуэты жирафа и осла) представлен на рис.10.

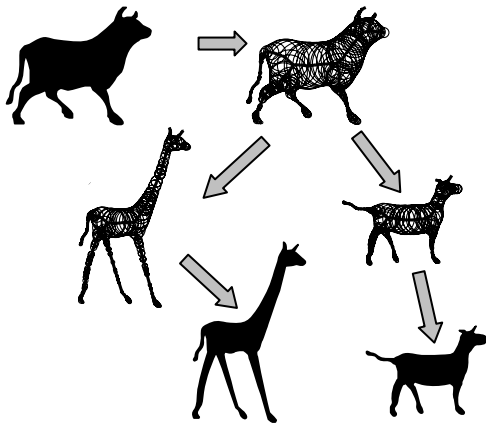


Рис.10. Преобразование формы изображения путём изменения контрольного графа скелета.

Изменение формы фигуры за счёт коррекции скелета и радиальной функции может быть использовано в компьютерной графике для создания анимации, а также в распознавании изображений для измерения сходства гибких объектов путём подгонки с использованием допустимого множества деформаций (Mestetskiy, 2009).

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный способ описания скелета в виде составной кривой Безье второго порядка даёт простой и наглядный инструмент для представления скелетов многоугольных фигур. Скелеты любой сложности теперь можно описать путём задания плоского прямолинейного графа. А полученное представление радиальной функции в форме сплайнов Безье обеспечивает возможность практического использования «циркулярного» представления многоугольных фигур как

объединения вписанных в фигуру кругов. Такое представлено открывает широкие возможности для анализа и преобразования формы объектов в компьютерной графике. Интересно отметить также, что предложенный подход неожиданно связывает между собой два давно и хорошо изученных объекта – скелет многоугольной фигуры и составную кривую Безье.

Литература

- Aichholzer O., Aurenhammer F., 1996. Straight Skeletons for General Polygonal Figures in the Plane. Lecture Notes in Computer Science. Vol. 1090. Springer-Verlag (1996), 117-126.
- Fortune S., 1987. A sweepline algorithm for Voronoi diagrams. *Algorithmica*, 2 (1987), 153-174.
- Lee, D., 1982. Medial axis transformation of a planar shape. *IEEE Trans. Pat. Anal. Mach. Int.* PAMI-4(4): 363-369, 1982.
- Siddiqi K., Pizer S.M., 2008. Medial representations: Mathematics, Algorithms and Applications. Springer, 2008.
- Yap C., 1987. An $O(n \log n)$ algorithm for the Voronoi diagram of the set of simple curve segments. *Discrete Comput. Geom.*, 2(1987), 365-393.
- Местецкий Л.М., 2009. Непрерывная морфология бинарных изображений: фигуры, скелеты, циркуляры. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.

Автор

Местецкий Леонид Моисеевич, доктор технических наук, профессор кафедры математических методов прогнозирования Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

E-mail: l.mest@ru.net

Skeleton of polygonal figure – representation by the a planar linear graph

Leonid Mestetskiy
Moscow State University, Russian Federation

Abstract

The new method of the polygonal figure skeleton representation is proposed. The skeleton is a planar graph, edges of which are linear and quadratic Bezier curves. And the radial function of skeleton is represented by Bezier splines too. This approach makes possible to describe the non-linear skeleton of polygonal figure by the so-called linear control graph comprised of vertices and sides of the control polygons of Bezier curves. Skeleton with the radial function allows the alternative method for representing the figure as a union of the family of circles.

Keyword: polygonal figure, skeleton, Voronoi diagram, radial function, parabolic edges, Bezier curves, the control graph

About the author

Leonid Mestetskiy is a professor at Moscow State University, Department of Mathematical methods of Forecast. His contact email is l.mest@ru.net.