

# Аппроксимация фазы проекционным методом Эрмита при восстановлении изображения по фазе

Е. Павельева, А. Крылов

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: paveljeva@yandex.ru, kryl@cs.msu.ru

## Аннотация

В работе предложен алгоритм восстановления изображения по фазе аппроксимации преобразования Фурье, полученной в результате проекционного метода Эрмита. Тестирование метода на изображениях базы данных SIPI показало хорошее качество восстановления аппроксимации изображений по фазе. Показано, что итерационный метод восстановления достаточно устойчив к области расширения фазы-оригинала нулями.

**Ключевые слова:** функции Эрмита, преобразование Фурье, фаза, проекционный метод Эрмита, восстановление изображения.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Фаза преобразования Фурье содержит больше информации, чем амплитуда преобразования Фурье [1, 2]. Использование информации о фазе преобразования Фурье позволяет решать различные задачи обработки изображений: поиск контуров на изображениях [3 - 4], определение уровня размытости [5] и повышение резкости изображений [6], шумоподавление [7], биометрические задачи [8] и др. [9 - 11].

В работе [1] приведены условия, при которых сигнал однозначно (с точностью до постоянного множителя) определяется фазой своего преобразования Фурье. Среди алгоритмов восстановления сигналов по фазе [1, 12] наиболее применимым на практике является итерационный алгоритм, основывающийся на методе проекций на выпуклые множества [13].

В данной статье рассматривается задача восстановления аппроксимации изображения по фазе аппроксимации преобразования Фурье на основе проекционного метода Эрмита. В проекционном методе Эрмита [14] используется аппроксимация разложения функции в ряд Фурье по функциям Эрмита [15], являющимся собственными функциями преобразования Фурье. На основе проекционного метода Эрмита решается ряд задач обработки сигналов и машинного зрения [16 - 17].

## 2. АППРОКСИМАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИЙ ЭРМИТА

Функции Эрмита

$$\psi_n(x) = \frac{(-1)^n e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} \cdot \frac{d^n (e^{-x^2})}{dx^n}$$

являются собственными функциями преобразования Фурье

$$F[f] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix} dx \quad \text{с собственными значениями}$$

$\pm 1, \pm i$ :  $F[\psi_n] = (-i)^n \psi_n$ , образуют полную ортонормированную систему функций в пространстве  $L_2(-\infty, \infty)$ . Функции Эрмита  $\psi_n(x)$  хорошо локализованы на отрезке  $[-\sqrt{2n+1}, \sqrt{2n+1}]$ , на котором сосредоточены все точки перегиба функции Эрмита.

Двумерные функции Эрмита (рис. 1) определяются через одномерные функции Эрмита:

$$\psi_{m,n}(x, y) = \psi_m(x) \cdot \psi_n(y),$$

поэтому двумерные функции Эрмита обладают аналогичными свойствами в пространстве  $L_2(R^2)$ .

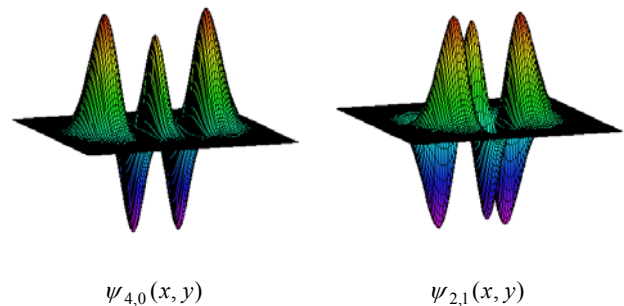


Рис 1. Двумерные функции Эрмита

**Опр. 1.** Пусть  $f_{m,n}(x, y)$  - аппроксимация разложения функции  $f(x, y) \in L_2(R^2)$  в ряд Фурье по функциям Эрмита (проекционный метод Эрмита [14]):

$$f(x, y) \approx f_{m,n}(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n c_{k,l} \psi_{k,l}(x, y). \quad (1)$$

Выражение

$$HF_{f,m,n}(x, y) = F[f_{m,n}(x, y)] = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n c_{k,l} (-i)^{k+l} \psi_{k,l}(x, y)$$

назовем аппроксимацией преобразования Фурье двумерной функции  $f(x, y)$  с использованием функций Эрмита (АПФЭ).

Функцию  $HF_{f,m,n}(x, y)$  можно записать в показательной форме записи:  $HF_{f,m,n}(x, y) = A_{f,m,n}(x, y) \cdot e^{i\varphi_{f,m,n}(x, y)}$ , где  $A_{f,m,n}(x, y)$  - амплитуда;  $\varphi_{f,m,n}(x, y) = \arg HF_{f,m,n}(x, y)$  - фаза  $HF_{f,m,n}(x, y)$ .

**Опр. 2.** Пусть  $F_{m,n}(x, y)$  - аппроксимация разложения комплексной функции  $F(x, y) \in L_2(R^2)$  в ряд Фурье по функциям Эрмита:

$$F(x, y) \approx F_{m,n}(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n C_{k,l} \psi_{k,l}(x, y),$$

где  $C_{k,l}$  – комплексные коэффициенты. Выражение

$$HF^{-1} F_{m,n}(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n C_{k,l} (-i)^{k+l} \psi_{k,l}(-x, -y)$$

назовем аппроксимацией обратного преобразования Фурье функции  $F(x, y)$  с использованием функций Эрмита (АОПФЭ). Можно показать, что АОПФЭ, примененное к АПФЭ дает аппроксимацию  $f_{m,n}(x, y)$ .

Пусть задано изображение с интенсивностью  $I(x, y)$ . Можно интерпретировать это изображение как двумерную функцию  $f(x, y) \in L_2(R^2)$ , которая совпадает с  $I(x, y)$  внутри некоторого прямоугольника  $D = [-A, A] \times [-B, B]$  и равна нулю вне  $D$ . Для применения алгоритма восстановления изображения по фазе АПФЭ растянем функции Эрмита  $\psi_{k,l}(x, y)$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ ,  $l = 0, 1, \dots, n$  в  $A/\sqrt{2m+1}$  раз вдоль оси  $Ox$  и в  $B/\sqrt{2n+1}$  раз вдоль оси  $Oy$ , чтобы функция  $\psi_{m,n}(x, y)$  в разложении (1) была локализована с вычислительной точки зрения в прямоугольнике  $D$ . Для подавления эффекта ложного оконтуривания в аппроксимации из исходного изображения перед разложением вычитается базовая функция [18].

### 3. АЛГОРИТМ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

В работе [1] предложен итерационный алгоритм восстановления дискретного сигнала  $f(x)$  длины  $N$  по фазе преобразования Фурье сигнала  $\hat{f}(x)$ , совпадающего с  $f(x)$  в  $N$  точках и продолженного по длине нулями не менее чем в два раза (до длины  $M \geq 2N$ ):

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x = 0, \dots, N-1 \\ 0, & x = N, \dots, M-1 \end{cases}$$

Этот алгоритм представляет собой двухшаговый метод проектирования на выпуклые множества [13], в котором на первом шаге каждой итерации используется информация о сигнале из пространственной области, а на втором шаге – из частотной.

Алгоритм восстановления изображения по фазе АПФЭ использует информацию только о фазе АПФЭ исходного изображения  $f(x, y) \in L_2(R^2)$ . Пусть  $f(x, y) = 0$  вне прямоугольника  $D = [-A, A] \times [-B, B]$ , и число функций Эрмита  $\psi_{k,l}(x, y)$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ ,  $l = 0, 1, \dots, n$  зафиксировано. Вычислим аппроксимацию  $f_{m,n}(x, y)$  и фазу АПФЭ  $\varphi_{f,m,n}(x, y)$ .

Рассмотрим два выпуклых множества  $G_1$  и  $G_2$ :

$$G_1 = \{f(x, y) : f(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n c_{k,l} \psi_{k,l}(x, y), c_{k,l} \in \mathbb{R}\},$$

$$G_2 = \{F(x, y) : \arg(F(x, y)) = \varphi_{f,m,n}(x, y)\}.$$

Пусть  $h_{p,q}(x, y) = \sum_{k=0}^p \sum_{l=0}^q d_{k,l} \psi_{k,l}(x, y)$ , где  $p > m, q > n$ , является аппроксимацией (1) некоторой функции

$h(x, y) \in L_2(R^2)$ . Тогда АПФЭ функции  $h(x, y)$  имеет вид:

$$HF_{h,p,q}(x, y) = |H_{h,p,q}(x, y)| \cdot e^{i\varphi_{h,p,q}(x, y)}. \quad \text{Определим}$$

проекторные операторы  $P_1$  и  $P_2$  на множества  $G_1$  и  $G_2$  следующим образом:

$$P_1 h = h_{m,n}(x, y) = \sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n d_{k,l} \psi_{k,l}(x, y),$$

$$P_2 h = |H_{h,p,q}(x, y)| \cdot e^{i\varphi_{f,m,n}(x, y)}.$$

Таким образом, под действием оператора  $P_1$  в аппроксимации  $h_{p,q}(x, y)$  остаются только слагаемые

$$\sum_{k=0}^m \sum_{l=0}^n d_{k,l} \psi_{k,l}(x, y), \quad \text{и происходит обнуление}$$

$(p+1) \cdot (q+1) - (m+1) \cdot (n+1)$  слагаемых, соответствующих высокочастотным функциям Эрмита, а под действием оператора  $P_2$  фаза АПФЭ заменяется на заданную фазу  $\varphi_{f,m,n}(x, y)$ .

Рассмотрим прямоугольник  $D' = [-A_1, A_1] \times [-B_1, B_1]$ ,  $A_1 > A$ ,  $B_1 > B$  и определим количество  $(p+1) \cdot (q+1)$  функций Эрмита  $\psi_{k,l}(x, y)$ ,  $k = 0, 1, \dots, p$ ,  $l = 0, 1, \dots, q$ , исходя из соотношений:

$$\frac{A_1}{A} = \frac{\sqrt{2p+1}}{\sqrt{2m+1}}, \quad \frac{B_1}{B} = \frac{\sqrt{2q+1}}{\sqrt{2n+1}}. \quad (2)$$

Таким образом, все функции Эрмита  $\psi_{k,l}(x, y)$ ,  $k = 0, 1, \dots, p$ ,  $l = 0, 1, \dots, q$  хорошо локализованы в прямоугольнике  $D'$ , поскольку функции Эрмита  $\psi_{k,l}(x, y)$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ ,  $l = 0, 1, \dots, n$  хорошо локализованы в  $D$ . Итерационный алгоритм восстановления аппроксимации  $f_{m,n}(x, y)$  по известной фазе АПФЭ  $\varphi_{f,m,n}(x, y)$  выглядит следующим образом.

**Начальная итерация.** Рассмотрим начальное приближение неизвестной амплитуды АПФЭ  $A^0(x, y)$  и получим начальное приближение АПФЭ:  $F^0(x, y) = A^0(x, y) e^{i\varphi_{f,m,n}(x, y)}$ . Вычислим АОПФЭ для  $F^0(x, y)$  и получим локализованное в  $D'$  начальное приближение  $g^1(x, y)$  аппроксимации изображения:  $g^1(x, y) = HF^{-1} F^0(x, y)$ .

**$(k+1)$ -я итерация** состоит из следующих действий:

1. Применение ограничения в пространственной области:  $f^k(x, y) = P_1 g^k$ .

$$2. G^k(x, y) = HF_{f^k,p,q}(x, y) = |A^k(x, y)| e^{i\varphi_{f^k,p,q}(x, y)}.$$

3. Применение ограничения в частотной области:  $F^k(x, y) = P_2 f^k(x, y) = |A^k(x, y)| e^{i\varphi_{f,m,n}(x, y)}$ .

$$4. g^{k+1}(x, y) = HF^{-1} F^k(x, y).$$

Алгоритм сходится, поскольку множества  $G_1$  и  $G_2$  – выпуклые [13]. Условие останова алгоритма после  $K$  итераций является условием:

$$\|f^K(x, y) - f^{K-1}(x, y)\|_{L_2(R^2)} < \varepsilon.$$

Важно отметить, что, в отличие от классического метода восстановления по фазе, в предложенном алгоритме восстановление аппроксимации изображения происходит по фазе АПФЭ того же изображения, а не другого изображения большего размера.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ АЛГОРИТМА

На рис. 2 приведен пример работы алгоритма для тестового изображения "Lena" размера 128×128 пикселей для K=10, 50, 100, 300, 500, 1000 итераций. Для аппроксимации (1) изображения в предложенном алгоритме взяты значения  $m = n = 40$ . В алгоритме восстановления аппроксимации изображения по фазе АПФЭ размеры прямоугольника  $D' = [-A_1, A_1] \times [-B_1, B_1]$  являются параметрами алгоритма.

Возьмем  $d = \frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = 1.5$  и начальное приближение

амплитуды  $A^0(x, y) \equiv 1$ . На рис. 2 на изображениях в левом верхнем углу показан номер итерации K, а снизу приведены значения метрик PSNR и MS-SSIM [19] между полученным изображением после K-й итерации и аппроксимацией  $f_{m,n}(x, y)$ . Видно, что уже после небольшого числа итераций изображение визуально малоотлично от аппроксимации  $f_{m,n}(x, y)$ .

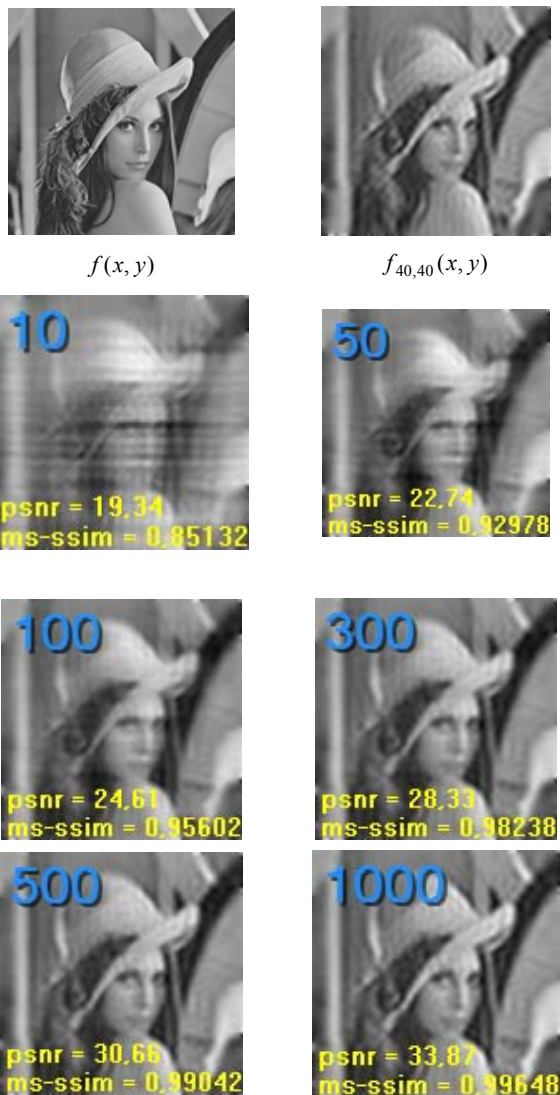


Рис. 2. Пример работы алгоритма восстановления изображений по фазе АПФЭ

На рис. 3 приведен пример работы алгоритма при различных вариантах выбора параметра  $d$ . Для аппроксимации (1) брались значения  $m = n = 40$ .

$d=1.2$	$d=1.5$ (рис. 2)	$d=2$
10 psnr = 20.14 ms-ssim = 0.88408	10 psnr = 19.34 ms-ssim = 0.85132	10 psnr = 18.35 ms-ssim = 0.82501
100 psnr = 23.13 ms-ssim = 0.96950	100 psnr = 24.61 ms-ssim = 0.95602	100 psnr = 24.38 ms-ssim = 0.95523
500 psnr = 23.82 ms-ssim = 0.97173	500 psnr = 30.66 ms-ssim = 0.99042	500 psnr = 29.72 ms-ssim = 0.98604

Рис. 3. Влияние параметра  $d$  на работу алгоритма

Для тестирования работы алгоритма рассмотрим изображения из базы данных SIPI Miscellaneous [20] размера 128×128 пикселей. На рис. 4 приведены аппроксимации изображений из базы данных и изображения после 500 итераций, а также значения метрик PSNR и MS-SSIM между изображениями.



Рис. 4. Результаты работы алгоритма

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Достаточно реалистичным является сценарий, когда у преобразования Фурье изображения фаза известна точно, а амплитуда дана с ошибкой. В этой ситуации достаточно интересно восстановить правильную амплитуду по фазе и, тем самым, восстановить изображение. Классический метод восстановления требует знания информации о фазе не исходного сигнала, а сигнала, расширенного не менее чем в два раза нулями. Однако такой информации для данной задачи получить нельзя. Отличием предложенного метода является возможность восстановления аппроксимации сигнала по фазе аппроксимации преобразования Фурье рядом из  $(m+1) \cdot (n+1)$  функций Эрмита. Это тоже требует дополнительной информации о количестве слагаемых в аппроксимации (1), однако объем этой дополнительной информации существенно меньше.

Цель дальнейшей работы – оценка устойчивости восстановления изображения при ошибке в задании параметров  $m$  и  $n$ .

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-07-00438.

## 6. ССЫЛКИ

- [1] Oppenheim A.V. and Lim J.S. The importance of phase in signals. *Proc. of the IEEE*, 69(5). – P. 529 - 541, 1981.
- [2] Ni X.S., Huo X. Statistical interpretation of the importance of phase information in signal and image reconstruction, *Statistics & Probability Letters*, vol. 77, no. 4. – P. 447 - 454, Feb. 2007.
- [3] Kovese P. Phase congruency detects corners and edges, the Australian pattern recognition society conference: DICTA 2003. – P. 309 - 318, 2003.
- [4] Skarbnik, Sagiv C., Zeevi Y.Y. “Edge detection and skeletonization using quantized localized phase,” in *Proc. EUSIPCO*, 2009, p. 1542 - 1546.
- [5] Hassen R., Wang Z., Salama M. No-reference image sharpness assessment based on local phase coherence measurement, in *ICASSP'10*, 2010. – P. 2434 - 2437
- [6] Blanchet G., Moisan L. and Rougé B. Measuring the global phase coherence of an image, in *ICIP*, Oct. 2008. – P. 1176 - 1179.
- [7] Kovese P. Phase preserving denoising of images, in *DICTA'99*, Perth WA, Dec. 1999. – P. 212 - 217.
- [8] Miyazawa K., Ito K., Aoki T., Kobayashi K., Nakajima H. A Phase-Based Iris Recognition Algorithm, *Advances in Biometrics, LNCS*, vol. 3832. – P. 356 - 365, 2006.
- [9] Jing X., Hong Y.X., Xin S.X., Ying M.X. Medical Image Mosaic Technology Based on Image Phase Correlation, in *ICDH*, 2012. – P. 274 - 277.
- [10] Narwaria M., Lin, W.I. McLoughlin V., Emmanuel S., Chia L.T. Fourier transform-based scalable image quality measure, *IEEE Trans. on Image Processing*, vol. 21, no. 8. – P. 3364 - 3377, Aug. 2012.
- [11] Reddy B.S., Chatterji B.N. An FFT-based technique for translation, rotation, and scale-invariant image registration, *IEEE Trans. on Image Processing*, vol.: 5, no. 8. – P. 1266 - 1271, Aug. 1996.
- [12] Ma C. “Novel criteria of uniqueness for signal reconstruction from phase”, *IEEE Trans. on Sig.Proc.*, vol. 39, no. 4.– P. 989 - 992, Apr. 1991.
- [13] Гурин Л.Г., Поляк Б.Т., Райк Э.В. Методы проекций для отыскания общей точки выпуклых множеств //

Вычисл. матем. и матем. физ. – Т. 7, 1967 – № 6. – С. 1211 - 1228.

- [14] Krylov A.S. and Korchagin D.N. Fast Hermite Projection Method, *LNCS*, vol. 4141, 2006. – P. 329 – 338.
- [15] Titchmarsh E.C.. Introduction to the theory of Fourier integrals, Oxford: Clarendon Press, vol. 337, 1937.
- [16] Pavelyeva E.A., Krylov A.S. An Adaptive Algorithm of Iris Image Key Points Detection, in: 20-th International Conference on Computer Graphics GraphiCon'2010. St. Petersburg, Russia, 2010. – P. 320 - 323.
- [17] Stankovic S., Orovic I., Krylov A. Video Frames Reconstruction based on Time-Frequency Analysis and Hermite projection method, *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, Vol. 2010, 2010. – P. 6:1 - 6:11.
- [18] Pavelyeva E.A., Krylov A.S. Image reconstruction from phase using Hermite projection method, in 11-th Int. Conf. “PRIA: New Information Technologies”, vol. 1. Samara, Russia, 2013. – P. 296 – 299.
- [19] Wang Z., Simoncelli E.P., Bovik A.C. “Multiscale structural similarity for image quality assessment”, in *Signals, Systems and Computers*, 2003. – P. 1398 - 1402.
- [20] <http://sipi.usc.edu/database/database.php?volume=misc> SIFI Miscellaneous images database.

### Об авторах:

Павельева Елена – ассистент кафедры математической физики факультета ВМК МГУ.  
E-mail: paveljeva@yandex.ru

Крылов Андрей – д. ф.-м. н., профессор, зав. лабораторией математических методов обработки изображений факультета ВМК МГУ.  
E-mail: kryl@cs.msu.ru