

# Функционально-воксельные вычисления на компьютере\*

А.В. Толок

alex080262@mail.ru

Лаборатория компьютерной графики

Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

*Предлагается краткое изложение основ нового метода функционально-воксельного моделирования для компьютерного решения широкого класса задач, приводимых к геометрической постановке. Рассматриваются основные вычислительные конструкции, основанные на локальных геометрических характеристиках, представленных воксельным скалярным полем. Приведены примеры R-функционального моделирования решения систем уравнений, нахождения интегральных характеристик для поверхности и тела сложной формы.*

**Ключевые слова:** Функционально-воксельная модель, M-образ, функционально-воксельная арифметика, функционально-воксельное интегрирование

## The Functional Voxel Calculations on the Computer\*

A. V. Tolok

Laboratory of the Computer Graphics

V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences

*In this paper the main principles of the functional voxel modeling are proposed. The new method of the functional voxel modeling is intended for the computer solution of a wide class of mathematical problems with geometrical definition. The main computational constructions are based on the local geometrical characteristics submitted by the voxel scalar field. Examples of models which allow us to solve the systems of equations and inequalities, to find the integral characteristics for the surfaces and objects of irregular shape are given.*

**Keywords:** functional voxel model, M-image, functional voxel arithmetic, functional voxel integration

### Введение

Ручной графический метод, применимый для решения широкого класса задач, всегда имел превосходство перед остальными методами, которое выражалось в наглядности не только полученного решения, но и этапов построения алгоритма. Почти каждый математический подход для удобства изложения сопровождается каким-либо графическим пояснением (визуализацией). Недостатком ручного графического метода, а также зрительного восприятия, является пространственный предел, который не позволяет решать задачи, размерность которых выше трёхмерной. В 2016 году в работе [7] формулируется новый компьютерный метод функционально-воксельного моделирования, основанный на принципах линейной аппроксимации функционального пространства для вычисления его локальных геометрических характеристик. В работах [1-4,6] приводятся различные применения метода и раскрываются его достоинства. Главной особенностью этого метода является его преемственность в организации компьютерного графического подхода к решению математических задач с геометрической постановкой. Отметим, что к геометрической постановке можно сводить решение достаточно широкого класса математических задач, основанных на применении

функциональных зависимостей. Функционально-воксельное содержание предложенной компьютерной модели позволяет организовать согласованность между тройственным компьютерным представлением пространства функции: функциональное (аналитическое, символьное представление), функционально- воксельное (локальное значение функции выражается через локальные геометрические характеристики, отображённые воксельными структурами) и воксельное (процедура вычислений строится исключительно на информации воксельных структур). Согласованность модели обеспечивается операторами перехода из одного представления пространства функции к другому. В работе [7] в подробной форме излагаются все три подхода к работе моделью. Эта статья посвящена рассмотрению воксельных графических вычислений пространства функции с приведением основных вычислительных конструкций.

### 1. Функционально-воксельное представление геометрической модели

Как уже отмечалось, построение функционально-воксельной модели основано на принципах линейной аппроксимации пространства функции для вычисления его локальных геометрических характеристик. В отличие от существующих подходов к линейной аппроксимации, локальные геометрические характеристики этой модели представлены компонентами нормали повышенной размерности

Работа опубликована по гранту РФФИ №16-07-20482.

пространства на основе утверждения: В пространстве  $E^{m+1}$  гиперплоскость вида  $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_mx_m = p$  представима как  $n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_mx_m + n_{m+1}x_{m+1} = 0$ . Например, модель для функции плоской фигуры «круг»:  $r^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$  представима параболоидной поверхностью в пространстве повышенной размерности:  $x_3 = r^2 - x_1^2 - x_2^2$ . Линейная аппроксимация определяет плоскую окрестность в точке 3D-пространства компонентами нормали  $\vec{n}(n_1, n_2, n_3, n_4)$  для нормального уравнения  $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 = 0$

Определение. Графический образ, соразмерный его прототипу и отображающий некоторое единственное свойство прототипа, называется графическим образом-моделью прототипа, или графический М-образ. Поскольку создаваемая воксельная геометрическая модель базируется на отображении локальных геометрических характеристик, то каждый из воксельных образов модели есть графический М-образ.

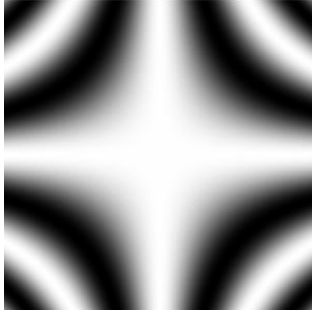


Рис. 1: Образ поверхности тригонометрической функции.

Представим аппроксимированную модель  $x'_3 = g(n_1, \dots, n_4, x_1, x_2)$  некоторой функции  $x_3 = f(x_1, x_2)$  (рис.1) нормальным векторным полем, выраженным четырьмя скалярными полями  $\vec{n}(n_1, n_2, n_3, n_4)$  согласно условиям утверждения. Установим некоторое соответствие скалярных полей  $n_1, n_2, n_3, n_4$ , определяемых промежутком  $[-1; 1]$  с их воксельным представлением  $C_1, C_2, C_3, C_4$ , выразив через градацию интенсивности тона монохромной палитры  $p \in P = [0; 255]$  (рис.2):

$$C_1 = \frac{P(1 + n_1)}{2}, C_2 = \frac{P(1 + n_2)}{2},$$

$$C_3 = \frac{P(1 + n_3)}{2}, C_4 = \frac{P(1 + n_4)}{2},$$

Характерно то, что на этом этапе прекращается компьютерная обработка функции аналитического вида и в дальнейших преобразованиях появляется возможность использовать только образные данные полученных базовых М-образов для реализации различных вычислений. Аналитическая функ-

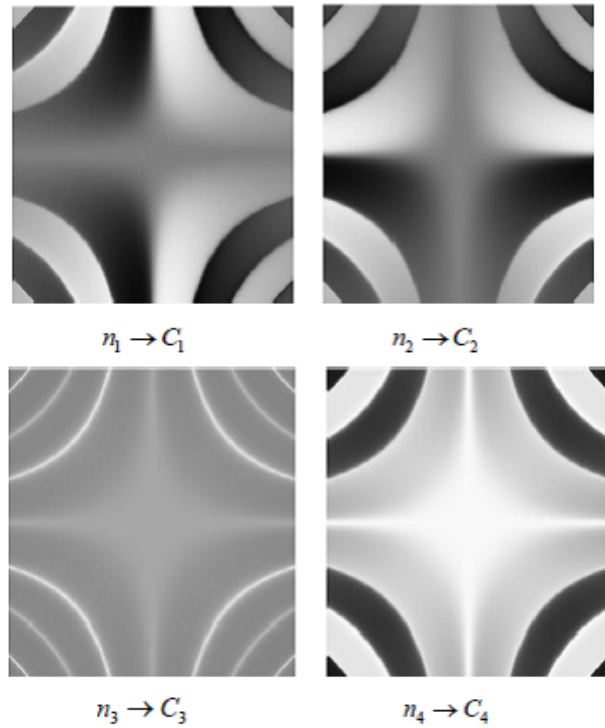


Рис. 2: Воксельное отображение компонентов нормали функции косинуса

ция может быть востребована лишь при определении максимально точных решений, а значит в достаточно редких случаях, либо для промежуточного уточнения модели при накоплении возможной погрешности от целочисленных вычислений в ходе её преобразований.

Основным достоинством такого компьютерного представления геометрической модели является её соразмерная связь с евклидовым пространством, позволяющая работать с любой размерностью задаваемых функций.

## 2. Функционально-воксельная арифметика

Сумма. Сумму двух функций с одинаковой областью определения можно записать как функцию  $(g + f)(x) = g(x) + f(x), \forall x \in X$ . При этом каждая из функций должна быть представлена в явном виде:  $x_i^f = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)$ ,  $x_i^g = g(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)$ , тогда значение суммы запишем как  $x_i^{Sum} = x_i^f + x_i^g$ . Для примера рассмотрим две разнородные по своей структуре функции для суммирования: 1. Тригонометрическая функция  $f$  вида

$$x_3^f = 5(x_2 \sin \pi x_1 + x_1^2 \cos \pi x_2) \quad (1)$$

2. Экспоненциальная функция  $g$  вида

$$x_3^g = (x_1 - 1)e^{-(x_1^2 + (x_2 + 1)^2)} + 10(0.2x_1 - x_1^3 - x_2^5)e^{-(x_1^2 + x_2^2)} + e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{3}} \quad (2)$$

На рисунке 3 приведены воксельные представления, полученные на основе этих функций. Пример

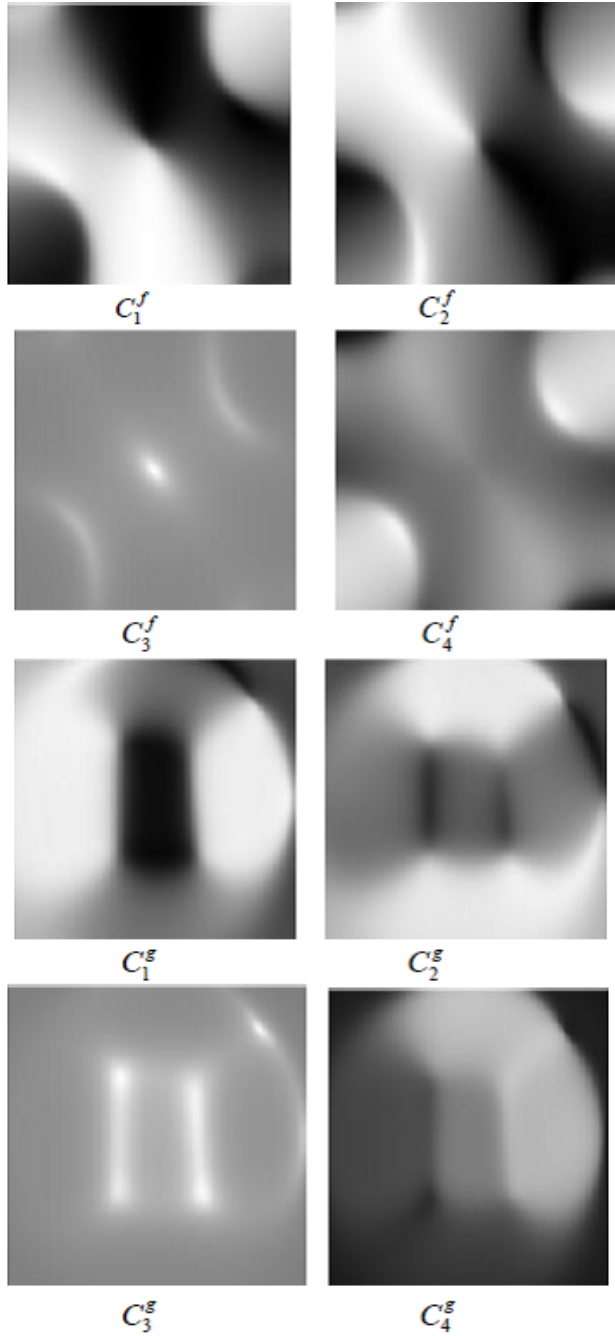


Рис. 3: Пример воксельных моделей функций (f) и (g)

чательным является тот факт, что через воксельный образ компонента  $n_i$  выражается как  $n_i = (C_i - P/2)/P$ , а функция любой сложности и размерности ( $m$ ) приобретает линейный вид:

$$x'_i = \frac{n_{m+1}}{n_i} - \sum_{j=1}^{j-i-1} x_j \frac{n_j}{n_i} - \sum_{j=i+1}^{j-m} x_j \frac{n_j}{n_i}$$

В рассматриваемом случае имеем сумму двух выражений функций (f) и (g): Перегруппировав урав-

$$x_3^{Sum} = \left( -\frac{a_1^f}{a_3^f} x_1 - \frac{a_2^f}{a_3^f} x_2 + \frac{a_4^f}{a_3^f} \right) + \left( -\frac{a_1^g}{a_3^g} x_1 - \frac{a_2^g}{a_3^g} x_2 + \frac{a_4^g}{a_3^g} \right)$$

нение, получим: На рисунке 4 представлены М-

$$x_3^{Sum} = -x_1 \left( \frac{n_1^f}{n_3^f} + \frac{n_1^g}{n_3^g} \right) - x_2 \left( \frac{n_2^f}{n_3^f} + \frac{n_2^g}{n_3^g} \right) + \left( \frac{n_4^f}{n_3^f} + \frac{n_4^g}{n_3^g} \right) =$$

$$= -x_1 \left( \frac{n_1^f n_3^g + n_1^g n_3^f}{n_3^f n_3^g} \right) - x_2 \left( \frac{n_2^f n_3^g + n_2^g n_3^f}{n_3^f n_3^g} \right) + \left( \frac{n_4^f n_3^g + n_4^g n_3^f}{n_3^f n_3^g} \right)$$

$$\text{Отсюда } a_1^{Sum} = n_1^f n_3^g + n_1^g n_3^f, a_2^{Sum} = n_2^f n_3^g + n_2^g n_3^f,$$

$$a_4^{Sum} = n_4^f n_3^g + n_4^g n_3^f, a_3^{Sum} = n_3^f n_3^g.$$

Нормируя коэффициенты получим

$$n_i^{Sum} = \frac{a_i^{Sum}}{\sqrt{(a_1^{Sum})^2 + (a_2^{Sum})^2 + (a_3^{Sum})^2 + (a_4^{Sum})^2}}$$

образы для суммы функций (f) и (g), полученной воксельным подходом. Достоверность результата

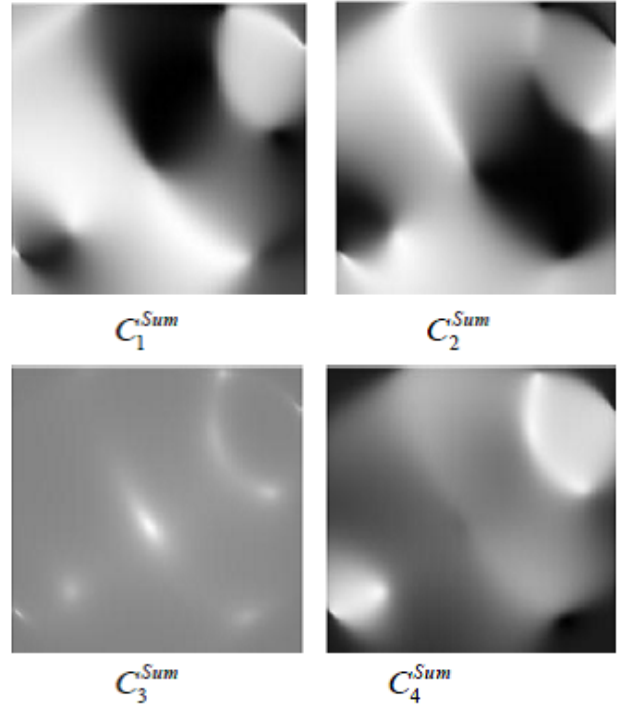


Рис. 4: Воксельная модель суммы двух функций, полученная воксельным подходом.

проверяется построением воксельной модели арифметической суммы двух заявленных функций. Все четыре образа совпадают. В общем случае имеем: Разность. Представим разность в виде суммы с отрицательной функцией, а значит, достаточно рас-

$$a_i^{Sum} = n_i^f n_i^g, a_j^{Sum} = n_j^f n_i^g + n_j^g n_i^f, \text{ где } j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, m$$

$$n_k^{Sum} = \frac{a_k^{Sum}}{\sqrt{\sum_{i=1}^m (a_i^{Sum})^2}}, \text{ где } k = 1, \dots, m.$$

смотреть способы получения конструкции  $f(x) = -f(x)$ . На рисунке 2.1.6 изображена воксельная модель для функции  $(x_3^f)^- = -(5(x_2 \sin \pi x_1 + x_1^2 \cos \pi x_2))$ . При рассмотрении функционально-воксельного представления получим Рисунок 5 на-

$$(x_3^f)^- = -\left(-\frac{n_1^f}{n_3^f}x_1 - \frac{n_2^f}{n_3^f}x_2 + \frac{n_4^f}{n_3^f}\right) = -\frac{n_1^f}{n_3^f}x_1 - \frac{n_2^f}{n_3^f}x_2 + \frac{n_4^f}{n_3^f}. \quad (4)$$

глядно показывает, что М-образы  $(C_1^f)^-, (C_2^f)^-,$  и  $(C_4^f)^-,$  по отношению к образам  $f_{1,2}^f$  и  $C_4^f$  имеют инвертированный (обратный) цвет  $C_i^f = P - C_i^f$  (где  $P$  - максимальное значение палитры). М-образ  $(C_3^f)^-$  по отношению к М-образу  $C_3^f$  сохраняет свои цветовые значения, что подтверждается выражением (4). Взятие по модулю. По сути, модуль пред-

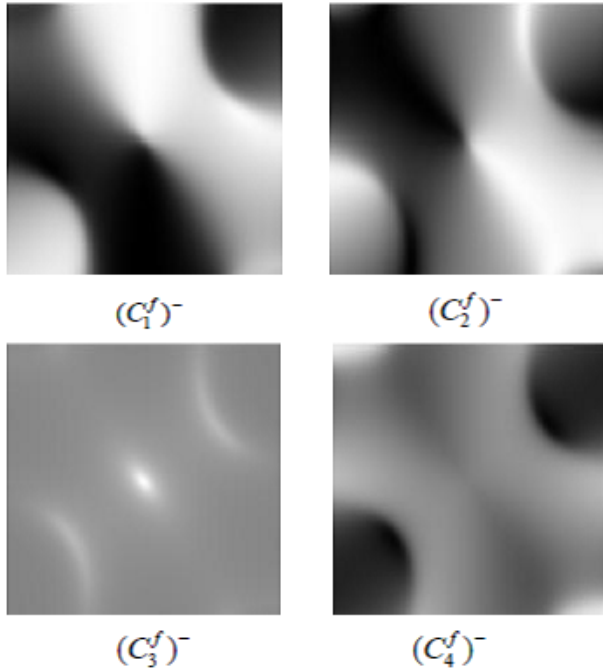


Рис. 5: Воксельная модель функции  $f(x) = -f(x)$ , полученная функциональным подходом

полагает изменение знака отрицательной области на противоположный, а посему, достаточно определить знак значения

$$x_3^f = -\frac{a_1^f}{a_3^f}x_1 - \frac{a_2^f}{a_3^f}x_2 + \frac{a_4^f}{a_3^f}$$

чтобы получить конструкцию вида

$$|C_{1,2,4}^f| = \begin{cases} C_{1,2,4}^f & \rightarrow x_3^f \geq 0 \\ P - C_{1,2,4}^f & \rightarrow x_3^f < 0 \end{cases}, |C_3^f| = C_3^f$$

На рисунке 6 изображена воксельная модель функции (f), взятой по модулю. Умножение. Аналогич-

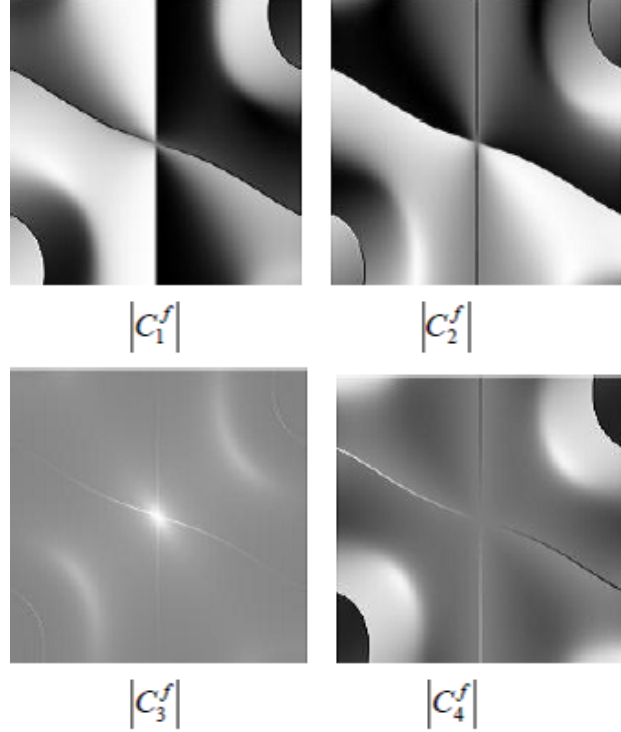


Рис. 6: Воксельная модель функции (f), взятой по модулю.

но рассмотрим арифметическую процедуру умножения функций воксельным подходом. В качестве примера оставим те же функции: (f) тригонометрическая и (g) - экспоненциальная.

Воксельный подход к представлению умножения приводит к определению нормированных коэффициентов, исходя из уравнения Проведём упрощение

$$x_3^{Mult} = \left(-\frac{n_1^f}{n_3^f}x_1 - \frac{n_2^f}{n_3^f}x_2 + \frac{n_4^f}{n_3^f}\right) \cdot \left(-\frac{n_1^g}{n_3^g}x_1 - \frac{n_2^g}{n_3^g}x_2 + \frac{n_4^g}{n_3^g}\right).$$

формулы через переопределение: Получаем следующие

$$a = -\frac{n_1^f}{n_3^f}, \quad b = -\frac{n_2^f}{n_3^f}, \quad c = -\frac{n_4^f}{n_3^f}, \quad d = -\frac{n_1^g}{n_3^g}, \quad e = -\frac{n_2^g}{n_3^g},$$

$$k = \frac{n_4^g}{n_3^g}.$$

еще упрощённое выражение: Рассмотрим отдельно каждый многочлен при аргументах  $x_i$ : Отсюда

$$\begin{aligned}
x_3^{Mult} &= (ax_1 + bx_2 + c) \cdot (dx_1 + ex_2 + k) = \\
&= ax_1(dx_1 + ex_2 + k) + bx_2(dx_1 + ex_2 + k) + c(dx_1 + ex_2 + k) \\
a(dx_1 + ex_2 + k) &= \\
&= -\frac{n_1^f}{n_3^f} \cdot \frac{-n_1^g x_1 - n_2^g x_2 + n_4^g}{n_3^g} = \frac{n_1^f n_1^g x_1 + n_1^f n_2^g x_2 - n_1^f n_4^g}{n_3^f n_3^g}, \\
b(dx_1 + ex_2 + k) &= \\
&= -\frac{n_2^f}{n_3^f} \cdot \frac{-n_1^g x_1 - n_2^g x_2 + n_4^g}{n_3^g} = \frac{n_2^f n_1^g x_1 + n_2^f n_2^g x_2 - n_2^f n_4^g}{n_3^f n_3^g}, \\
c(dx_1 + ex_2 + k) &= \\
&= -\frac{n_4^f}{n_3^f} \cdot \frac{-n_1^g x_1 - n_2^g x_2 + n_4^g}{n_3^g} = \frac{n_4^f n_1^g x_1 + n_4^f n_2^g x_2 - n_4^f n_4^g}{n_3^f n_3^g}.
\end{aligned}$$

можно сделать вывод, что теперь Получение ком-

$$\begin{aligned}
a_1^{Mult} &= n_1^f (n_1^g x_1 + n_2^g x_2 - n_4^g), \\
a_2^{Mult} &= n_2^f (n_1^g x_1 + n_2^g x_2 - n_4^g), \\
a_4^{Mult} &= n_4^f (n_1^g x_1 + n_2^g x_2 - n_4^g), \\
a_3^{Mult} &= n_3^f n_3^g.
\end{aligned}$$

понентов приводит к нормированию коэффициентов. На рисунке 7 представлены М-образы для про-

$$n_i^{Mult} = \frac{a_i^{Mult}}{\sqrt{(a_1^{Mult})^2 + (a_2^{Mult})^2 + (a_3^{Mult})^2 + (a_4^{Mult})^2}}, \text{ где } i=1, \dots, 4.$$

изведения функций (f) и (g), полученного воксельным подходом. В общем случае имеем: Воксельный подход функционального деления приводит к определению нормированных коэффициентов исходя из уравнения. Проведём упрощение формулы через переприсвоение: Получаем следующее упрощённое выражение: Рассмотрим отдельно каждый многочлен при аргументах  $x_i$ : Отсюда делается вывод, что Получение компонентов приводит к перенормированию коэффициентов. На рисунке 8 представлены М-образы воксельной модели для частного функций (f) и (g), полученного воксельным подходом. Реализация основных арифметических процедур позволяет говорить о возможности применения воксельных моделей в решении функциональных уравнений. Например, такое уравнение как  $f(x) + g(x) - f(x)g(x) = h(x)$  (5) можно представить уравнением  $s(x) - m(x) = h(x)$ , где  $f(x) + g(x) = s(x)$ , а  $f(x) \times g(x) = m(x)$ . Такие функции не только содержат достаточную компьютерную информацию в качестве решения, но и позволяют применять такое представление функций в формулировке новых, более сложных уравнений. На рисунке 9 демонстрируется решение уравнения (5) на основе функционального  $f(x) + g(x) -$

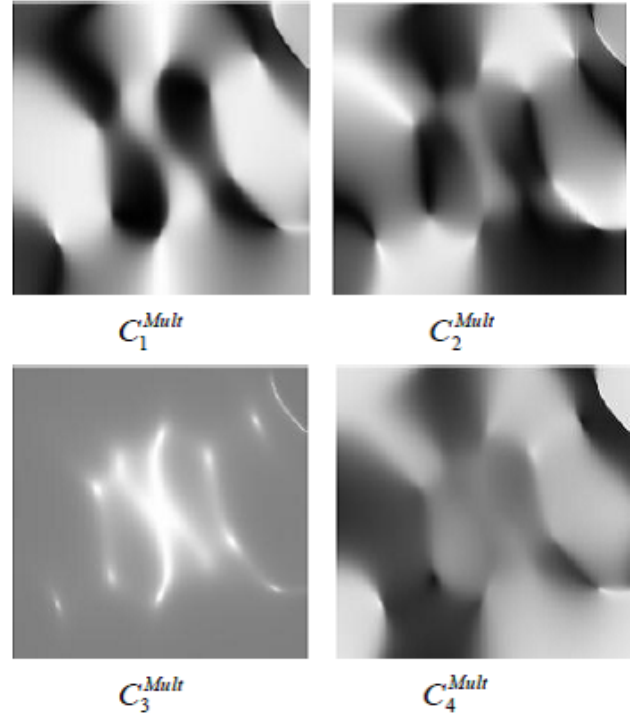


Рис. 7: Воксельная модель произведения двух функций, полученная воксельным подходом.

$$a_i^{Sum} = n_i^f n_i^g, \quad a_j^{Sum} = n_j^f \left( \sum_{j=1}^{i-1} n_j^g x_j + \sum_{j=i+1}^{m-1} n_j^g x_j - n_m^g \right).$$

$$n_k^{Sum} = \frac{a_k^{Sum}}{\sqrt{\sum_{l=1}^m (a_l^{Sum})^2}}, \text{ где } k=1, \dots, m.$$

$$x_3^{Div} = \left( -\frac{n_1^f}{n_3^f} x_1 - \frac{n_2^f}{n_3^f} x_2 + \frac{n_4^f}{n_3^f} \right) / \left( -\frac{n_1^g}{n_3^g} x_1 - \frac{n_2^g}{n_3^g} x_2 + \frac{n_4^g}{n_3^g} \right), \quad x_3^g \neq 0.$$

$$\begin{aligned}
a &= -\frac{n_1^f}{n_3^f}, \quad b = -\frac{n_2^f}{n_3^f}, \quad c = -\frac{n_4^f}{n_3^f}, \quad d = -\frac{n_1^g}{n_3^g}, \quad e = -\frac{n_2^g}{n_3^g}, \\
k &= \frac{n_4^g}{n_3^g}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3^{Div} &= (ax_1 + bx_2 + c) / (dx_1 + ex_2 + k) = \\
&= ax_1 / (dx_1 + ex_2 + k) + bx_2 / (dx_1 + ex_2 + k) + c / (dx_1 + ex_2 + k), \\
&(dx_1 + ex_2 + k) \neq 0.
\end{aligned}$$

$-f(x)g(x) = h(x)$  и воксельного  $s(x) - m(x) = h(x)$  подходов.

### Определение значения интеграла функционально-воксельным методом

В общем случае площадь положительной функциональной области вычисляется взятием двойного интеграла по границам функции. Продемонстриру-



$$a/(dx_1 + ex_2 + k) =$$

$$= -\frac{n_1^f}{n_3^f} / \frac{-n_1^\varepsilon x_1 - n_2^\varepsilon x_2 + n_4^\varepsilon}{n_3^\varepsilon} = \frac{n_1^f n_3^\varepsilon}{n_3^f n_1^\varepsilon x_1 + n_3^f n_2^\varepsilon x_2 - n_3^f n_4^\varepsilon},$$

$$b(dx_1 + ex_2 + k) =$$

$$= -\frac{n_2^f}{n_3^f} / \frac{-n_1^\varepsilon x_1 - n_2^\varepsilon x_2 + n_4^\varepsilon}{n_3^\varepsilon} = \frac{n_2^f n_3^\varepsilon}{n_3^f n_1^\varepsilon x_1 + n_3^f n_2^\varepsilon x_2 - n_3^f n_4^\varepsilon},$$

$$c(dx_1 + ex_2 + k) =$$

$$= -\frac{n_4^f}{n_3^f} / \frac{-n_1^\varepsilon x_1 - n_2^\varepsilon x_2 + n_4^\varepsilon}{n_3^\varepsilon} = \frac{n_4^f n_3^\varepsilon}{n_3^f n_1^\varepsilon x_1 + n_3^f n_2^\varepsilon x_2 - n_3^f n_4^\varepsilon}.$$

$$a_1^{Div} = n_1^f n_3^\varepsilon, a_2^{Div} = n_2^f n_3^\varepsilon, a_4^{Div} = n_4^f n_3^\varepsilon, a$$

$$a_3^{Div} = n_3^f (n_1^\varepsilon x_1 + n_2^\varepsilon x_2 - n_4^\varepsilon).$$

$$n_i^{Div} = \frac{a_i^{Div}}{\sqrt{(a_1^{Div})^2 + (a_2^{Div})^2 + (a_3^{Div})^2 + (a_4^{Div})^2}}, \text{ где } i = 1, \dots, 4.$$

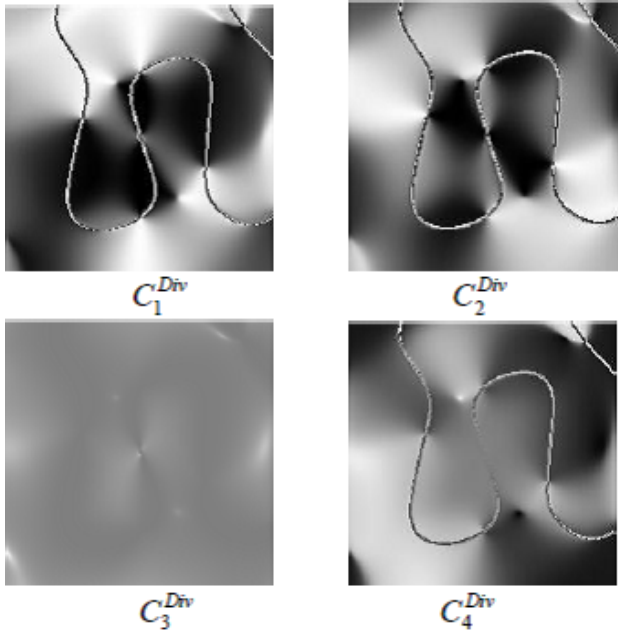


Рис. 8: Воксельная модель деления двух функций, полученная воксельным подходом.

ем функционально-воксельный способ интегрирования функции  $f(x, y)$  по аналогии с классическим способом. Преобразуем функцию  $f(x, y)$  таким образом, что положительные значения обратим в единицу, а отрицательные обнулим: Теперь можно записать, что где  $f(x, y) \neq 0, m \times n$ - двумерная целочисленная область воксельного пространства,  $S_x \times S_y$  - площадь плоского вокселя.

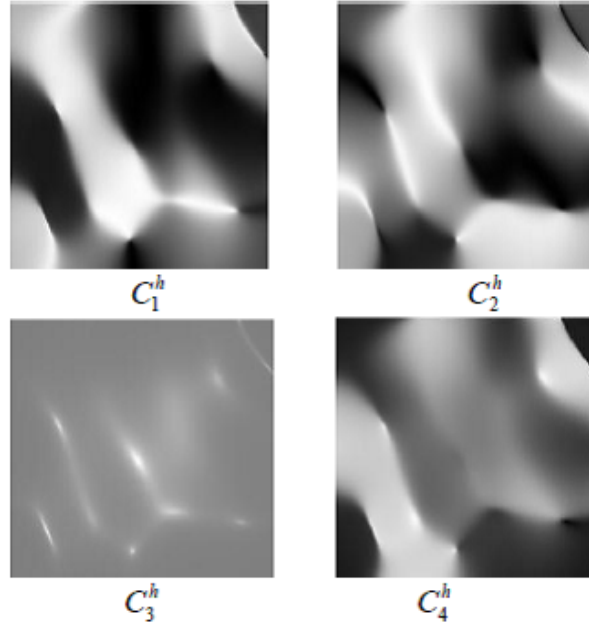


Рис. 9: Функционально-воксельное представление функции как решения функционального уравнения

$$S_f = \int_a^b \int_{g(x)}^{q(x)} f(x, y) dy dx.$$

$$f_0^1(x, y) = \frac{\frac{-f(x, y)}{|f(x, y)|} + \frac{|-f(x, y)|}{|f(x, y)|}}{2}.$$

$$S_f = \int_a^b \int_{g(x)}^{q(x)} f(x, y) dy dx \approx \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m f_0^1(x_i, y_j) S_y S_x.$$

Характерен тот факт, что полученный способ определения площади для двойного интеграла легко адаптируется для получения объемов многомерных функций. Рассматривая  $n$ - мерный случай для функции вида  $f(x_1, \dots, x_n) \neq 0$  можно записать, что

$$S_f^n \approx \sum_{i_1=0}^{m_1} \dots \sum_{i_n=0}^{m_n} f_0^1(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}) S_{x_1} \dots S_{x_n}.$$

Рассмотрим простой пример определения площади параболы вида  $y = x^2 - 1$  (рис.10). Для описания сложных замкнутых областей обратимся к математическому аппарату R-функций [5]. Представим рассматриваемую функцию в предикатном виде как  $w_1 = x^2 - y - 1$ . Но фигура параболы не является замкнутой, и представленный вид описания не отвечает поставленному требованию. Допустим, нас интересует площадь фигуры, располо-

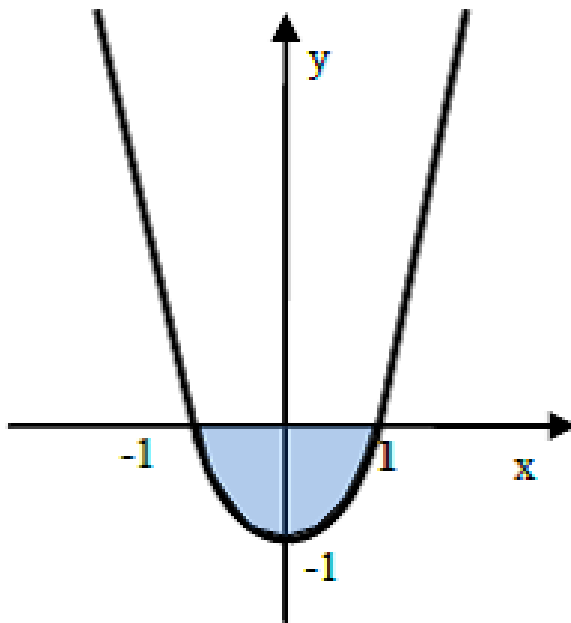


Рис. 10: Функция параболы

женной ниже оси  $Ox$ , т.е. в области отрицательных значений  $y$  (рис.10). Представим замкнутую область пересечением двух незамкнутых областей:  $w_1$  и полупространства  $w_2 = -y$ . В результате имеем общий вид замкнутой функции-предиката  $w = w_1 + w_2 - \sqrt{w_1^2 + w_2^2}$ , где  $w_1 = x^2 - y - 1$  и  $w_2 = -y$

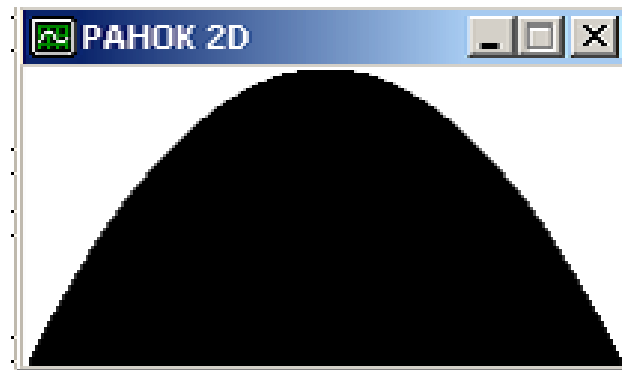


Рис. 11: Отрицательная область выделена белым цветом

Для проверки корректности полученного результата произведён расчёт площади «отрицательной» (рис.11)  $S_w^- = 0.667702$  и «положительной» (рис.12)  $S_w^+ = 1.332253$  области  $w$ . Учитывая, что площадь заданной области определения функции должна стремиться к 2, суммируем оба полученных значения:  $S_w = S_w^+ + S_w^- = 1.999955$ . Как видно из примера, в ходе расчётов потеря площади составила сотысячные доли.

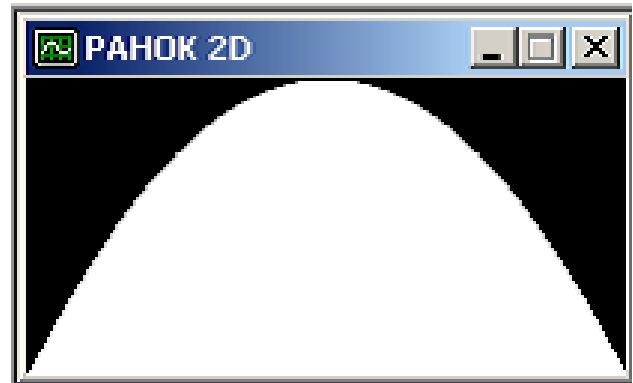


Рис. 12: Положительная область выделена белым цветом

#### 4. Решение САУ функционально-воксельным методом

Рассмотрим решение примера системы элементарных линейных уравнений: Результатом будет яв-

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ -2x + y - 6 = 0 \end{cases}$$

ляться некоторая точка пересечения двух прямых, заданных уравнениями системы. Для решения системы уравнений функционально-воксельным методом достаточно преобразовать математическую запись системы уравнений в запись единого уравнения поверхности (рис.13): при  $w \rightarrow 0$ . Покажем, что

$$\begin{cases} 2x + 3y - 6 = 0 \\ -2x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow w = |2x + 3y - 6| + |-2x + y - 6|,$$

общий вид решения системы САУ методом ФВМ можно записать как при  $w \rightarrow 0$ . Рассмотрим слу-

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \Rightarrow w = |f_1(x_1, \dots, x_n)| + \dots + |f_n(x_1, \dots, x_n)|,$$

чай пересечения квадратичных кривых: параболы и окружности. Для этого преобразуем систему кривых в общую поверхность. При  $w \rightarrow 0$  получаем образ, изображённый на рисунке 14, где результатом являются точки, симметричные относительно оси  $Oy$ . Можно также говорить о корректности получаемого результата при рассмотрении других разнообразных примеров двумерных функций различного степенного порядка, поскольку применяемое свойство нуля на границе присутствует для всех неявно заданных функций. То же самое относится к повышению размерности пространства уравнений системы, что позволяет отнести такой подход к разряду универсальных компьютерных

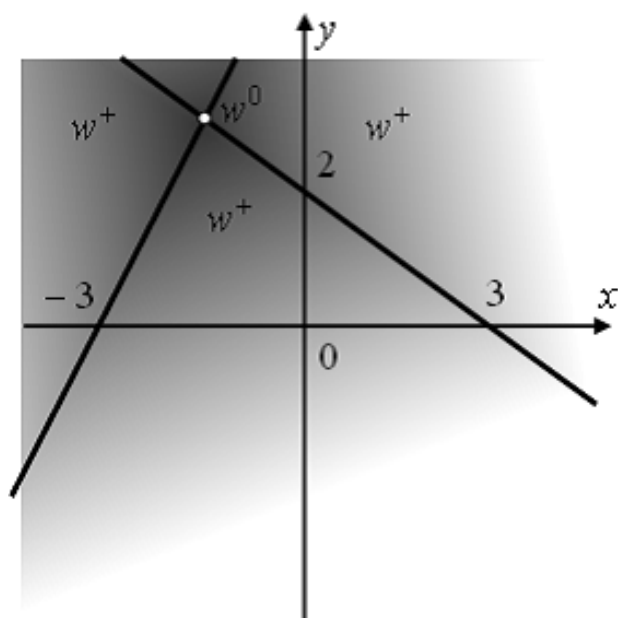


Рис. 13: Поверхность суммы модулей двух линейных функций

$$\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

$$w = |x^2 - y| + |x^2 + y^2 - 9|.$$

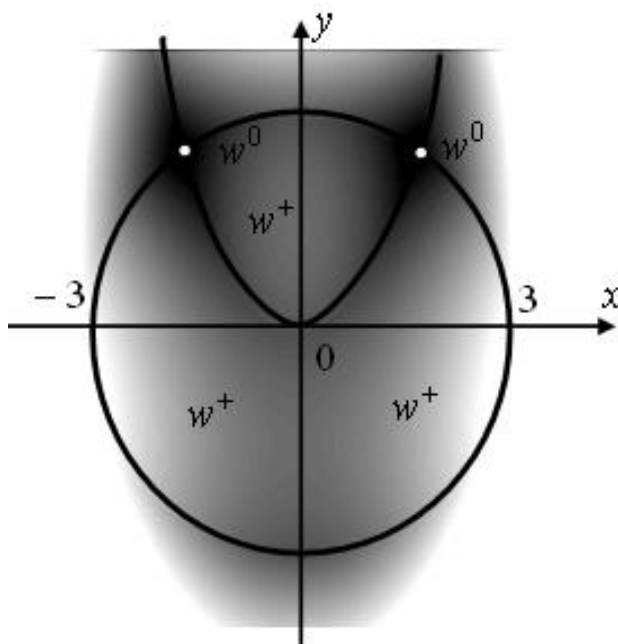


Рис. 14: Поверхность суммы модулей двух нелинейных функций

способов решения систем алгебраических уравнений методом функционально- воксельного моделирования.

## 5. Заключение

Основным достоинством метода и его перспективной является значительное повышение уровня геометризации компьютерной модели в пространстве повышенной размерности, позволяющей упростить расчёт таких условных математических конструкций, как дифференцирование и интегрирование функции. Все продемонстрированные расчётные конструкции метода базируются на применении локальных геометрических характеристик повышенного функционального пространства и ориентированы на применение к сложным многомерным функциям..

## Литература

- [1] Васильев С.Н., Локтев М.А., Толок А.В., Толок Н.Б., Ульянов С.А. К планированию маршрутов в 3D-среде с многовариантной моделью // Труды СПИИРАН, Выпуск №2 (45). ISSN 2078-9181. Санкт-Петербург, 2016 г., С 5 - 25.
- [2] Григорьев С.Н., Локтев М.А., Толок А.В. Построение воксельных моделей геометрических объектов // Прикладная информатика № 4 (46) 2013 г. - С.50-55.
- [3] Григорьев С.Н., Силантьев Д.А., Лоторевич Е.А., Пушкарёв С.А., Толок А.В. Автоматизация графического способа решения некоторых математических задач // Прикладная информатика № 5 (41) 2012 - С.44-50.
- [4] Ковалёв С.П., Толок А.В. Применение модельно-ориентированного подхода в управлении жизненным циклом технических изделий // Информационные технологии в проектировании и производстве. 2015. №2(158). С.3-9.
- [5] Максименко-Шейко К.В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей; Монография. - Харьков, ИП-Маш НАН Украина, 2009. - 306 с.
- [6] Силантьев Д.А., Лоторевич Е.А., Пушкарёв С.А., Толок А.В. Воксельно-математическое моделирование при решении задач определения площади для поверхностей деталей // Информационные технологии в проектировании и производстве №3, 2013, С 29-33.
- [7] Толок А.В. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании / Под. ред. академика РАН С.Н. Васильева. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2016. - 112 с. - ISBN 978- 5-9221-1680-0.