Приближенное вычисление производных методом аппроксимации кубическими сплайнами*

А. Замятин, Е. Замятина
alex080262@mail.ru
Ростов-на-Дону, Россия, Архитектурно-строительная академия
Донской государственный технический университет

В статье рассмотрены вопросы аппроксимации заданных точечных рядов кубическими сплайнами и приближенное вычисление производных первого, второго и третьего порядков полученных пространственных линий. Проведена оценка погрешностей различных способов аппроксимации на конкретных примерах.

Ключевые слова: *аппроксимация, кубические сплайны, касательная, производная первого порядка, производная второго порядка, производная третьего порядка, погрешность*

Введение

При решении задач по моделированию поверхностей возникает необходимость аппроксимации заданных точек плавными линиями. Под "плавностью линии" подразумевается наличие в каждой ее точке непрерывных производных, как можно более высоких порядков. Широкое распространение в настоящее время получили сплайновые методы аппроксимации точечных рядов. Одним из самых простых, следовательно, требующим наименьшие ресурсы вычислительной системы, является метод аппроксимации кубическими сплайнами [2, 3]. Кроме этого, в большинстве современных векторных графических систем построение кубических сплайнов, является встроенной функцией, что значительно облегчает разработку графических приложений. Будем считать, что есть возможность построения кубических сплайнов и определения первых и вторых производных в любой точке сплайна по его параметру.

1. Аппроксимация точечного ряда кубическим сплайном

Пусть в пространстве задан набор точек A_i. Построим кубический сплайн, проходящий через заданные точки (рис. 1). В каждой точке построенной линии имеются непрерывные производные по параметру сплайна только первого и второго порядков, причем производные первого порядка описываются квадратичной зависимостью (рис.2), производные второго порядка – линейной зависимостью (рис. 3). Производные третьего порядка на каждом интервале между заданными точками имеют постоянные, отличные от других интервалов значения (рис. 4). На рис. 2 – 4 штрих обозначает производную по параметру сплайна.

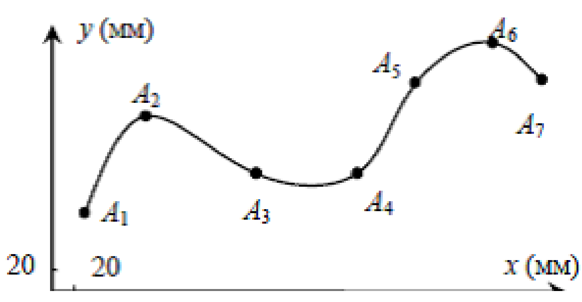

Рис. 1: Построение сплайна по заданным точкам.

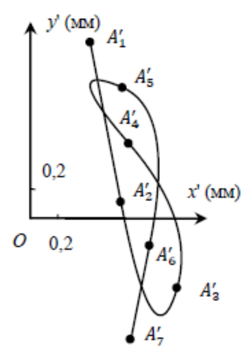

Рис. 2: Зависимость 1-й производной..

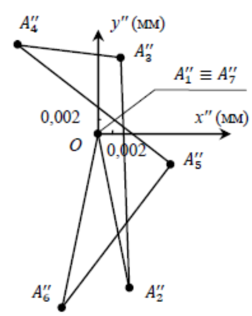

Рис. 3: Зависимость 2-й производной.

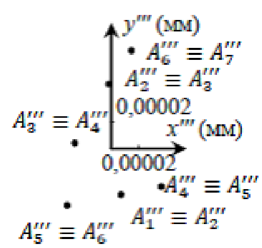

Рис. 4: Зависимость 3-й производной.

При решении многих задач такая аппроксимация производных, особенно третьего порядка, является неприемлемой. Поэтому далее рассмотрены вопросы построения плавных линий с непрерывными производными до третьего порядка включительно

Работа опубликована по гранту РФФИ №16-07-20482.

и повышение точности аппроксимации, с использованием сплайнов третьего порядка.

2. Вычисление производных первого порядка

Для оценки точности аппроксимации выберем аналитически заданную трансцендентную кривую или кривую от четвертого порядка и выше. Будем называть ее калибровочной кривой (КК). Пусть уравнение КК имеет вид:

$$\vec{r}_{(u)} = \vec{r}_{\text{КК}}(u) \tag{1}$$

Зададим интервал изменения параметра КК – $[u_{\text{н}}; u_{\text{к}}]$. Поделим этот интервал на заданное число частей, получим дискретный набор значений параметра, принадлежащий заданному интервалу $u_i \in [u_{\text{н}}; u_{\text{к}}]$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, причем $u_1 = u_{\text{н}}; u_n = u_{\text{к}}$. Для каждого значения интервала вычислим точку, принадлежащую заданной КК – A_i; радиусы – векторы этих точек, учитывая (1), равны$\vec{A_i} = \vec{r}_{\text{КК}}(u_i)$. Будем считать, что кроме полученного набора точек никаких данных о КК нет. Выполним аппроксимацию точечного ряда A_i сплайном. Назовем эту кривую аппроксимирующим сплайном (АС). Построим сплайн без задания касательных в его начальной и конечной точках (сплайн со свободными концами). Уравнение построенного сплайна запишем в виде

$$\vec{r}_{(v)} = \vec{r}_{AC}(v) \tag{2}$$

Определим связь параметра АС (2) – v и параметра КК (1) – u. Поставим в соответствие параметру u_i параметр v_i. Выполним аппроксимацию полученной зависимости параметров сплайном со свободными концами (рис. 5)

$$\vec{r}_{(s)} = \vec{r}_{vu}(s) \tag{3}$$

Имея зависимость параметров (3), уравнение АС

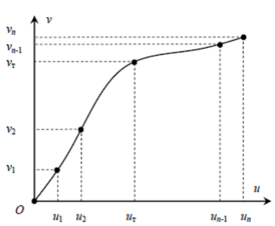

Рис. 5: Зависимость параметра v от u.

можно записать в виде

$$\vec{r}_{(u)} = \vec{r}_{AC}(v(u)) \tag{4}$$

Теперь, задав параметр $u = u_T$, можно получить точку на КК, подставив значение параметра в (1), и точку ей соответствующую на АС, определив $v_T = v(u_T)$ и подставив его в (4). Параметр v_T определяется как точка пересечения прямой $u = u_T$ со сплайном (3) (рис. 5). Определим первые производные в точках, соответствующих заданному параметру u_T на КК и АС. Учитывая (1), производная на КК равна

$$\frac{d\vec{r}(u_t)}{du} = \frac{d\vec{r}_{\text{КК}}(u_t)}{du} \tag{5}$$

Продифференцировав (4) по параметру u, получим

$$\frac{d\vec{r}(u_t)}{du} = \frac{d\vec{r}_{AC}(v(u_T))}{dv}\frac{dv(u_T)}{du} \tag{6}$$

Для расчета $\frac{dv(u_T)}{du}$ найдем параметр s_T, соответствующий на сплайне (3) точке с координатами $(u_T, v_T, 0)$. Определим первую производную в этой точке по параметру s

$$\frac{d\vec{r}(s_t)}{ds} = \frac{d\vec{r}_{\text{uv}}(s_t)}{ds} \tag{7}$$

Обозначим координаты вектора (7) через $\{\frac{du(s_T)}{ds}; \frac{dv(s_T)}{ds}; 0\}$, тогда

$$\frac{dv(u_T)}{du} = \frac{\frac{dv(s_T)}{ds}}{\frac{du(s_T)}{ds}} \tag{8}$$

3. Вычисление производных второго порядка

Аналогично найдем вторые производные. На КК вторую производную получим продифференцировав (5) по параметру u

$$\frac{d^2\vec{r}(u_t)}{du^2} = \frac{d^2\vec{r}_{\text{КК}}(u_t)}{du^2} \tag{9}$$

Вторая производная на АС, учитывая (6), равна

$$\frac{d^2\vec{r}(u_t)}{du^2} = \\ = \frac{d^2\vec{r}_{\text{AC}}(v(u_t))}{dv^2}\left(\frac{dv(u_T)}{du}\right)\frac{d\vec{r}_{AC}(v(u_T))}{dv}\frac{d^2v(u_T)}{du^2} \tag{10}$$

Для нахождения второй производной параметра v по u продифференцируем (7) по s

$$\frac{d^2\vec{r}(s_t)}{ds^2} = \frac{d^2\vec{r}_{\text{uv}}(s_t)}{ds^2} \tag{11}$$

координаты этого вектора $\{\frac{d^2u(s_T)}{ds^2}; \frac{d^2v(s_T)}{ds^2}; 0\}$, тогда

$$\frac{d^2v(u_T)}{du^2} = \frac{\left(\frac{du(s_T)}{ds} \times \frac{d^2v(s_T)}{ds^2} - \frac{d^2u(s_T)}{ds^2} \times \frac{dv(s_T)}{ds}\right)}{\left(\frac{du(s_T)}{ds}\right)^3} \tag{12}$$

4. Вычисление производных третьего порядка

Продифференцировав (9) по параметру u получим значение производной третьего порядка на КК

$$\frac{d^3\vec{r}(u_t)}{du^3} = \frac{d^3\vec{r}_{\text{KK}}(u_t)}{du^3} \tag{13}$$

Как было показано выше, АС (2) не имеет непрерывных производных третьего порядка. Поэтому по формуле (6) вычислим первые производные в точках A_i. Выполним аппроксимацию полученных производных сплайном

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_u(t) \tag{14}$$

Аналогично тому, как была определена зависимость параметра v от u (3), определим зависимость параметра t от u

$$\vec{r}(p) = \vec{r}_{tu}(p) \tag{15}$$

и запишем (14) в виде

$$\vec{r}(u) = \vec{r}_u(t(u)) \tag{16}$$

Тогда для вычисления второй производной АС при $u = u_t$ по (15) найдем параметр p_T , соответствующий u_Tи воспользуемся формулой аналогичной (6)

$$\frac{d\vec{r}_u(t(u_t))}{du} = \frac{d\vec{r}_u(t(u_T))}{dt}\frac{dt(u_T)}{du} \tag{17}$$

где $\frac{dt(u_T)}{du} = \frac{\frac{dt(p_T)}{dp}}{\frac{du(p_T)}{dp}}$ (см. (8)). Для получения производной третьего порядка продифференцируем (17) по параметру u, учитывая (10), получим

$$\frac{d^3\vec{r}(u_T)}{du^3} = \frac{d^2\vec{r}_u(t(u_T))}{du^3} =$$

$$= \frac{d^2\vec{r}_u(t(u_T))}{dt^2}\left(\frac{dt(u_T)}{du}\right)^2 + \frac{d\vec{r}_u(t(u_T))}{dt}\frac{d^2t(u_T)}{du^2} \tag{18}$$

где

$$\frac{d^2t(u_T)}{du^2} = \frac{\frac{du(p_T)}{dp}\times\frac{d^2t(p_T)}{dp^2} - \frac{d^2u(p_T)}{dp^2}\times\frac{dt(p_T)}{dp}}{\left(\frac{du(p_T)}{dp}\right)^3}$$

5. Определение точности аппроксимации при использовании сплайнов со свободными концами

Рассмотрим точность аппроксимации. Для оценки точности будем использовать абсолютные погрешности равные

$$\begin{aligned}
\delta(u) &= |\vec{r}_{AC}(u) - \vec{r}_{KK}(u)| \\
\delta'(u) &= \left|\frac{d\vec{r}_{AC}(u)}{du} - \frac{d\vec{r}_{KK}(u)}{du}\right| \\
\delta''(u) &= \left|\frac{d^2\vec{r}_{AC}(u)}{du^2} - \frac{d^2\vec{r}_{KK}(u)}{du^2}\right| \\
\delta'''(u) &= \left|\frac{d^3\vec{r}_{AC}(u)}{du^3} - \frac{d^3\vec{r}_{KK}(u)}{du^3}\right|
\end{aligned} \tag{19}$$

В уравнениях (19) для кратности $\vec{r}_{AC}(v(u))$ записано в виде $\vec{r}_{AC}(u)$. Возьмем в качестве КК кардеоиду, для нее имеем

$$\begin{aligned}
\vec{r}(u) &= \{2R(1+\cos u)\cos u, 2r(1+\cos u)\sin u, 0\}; \\
\frac{d\vec{r}(u)}{du} &= \{-2R(\sin u + \sin(2u)), 2R(\cos u + \cos(2u)), 0\} \\
\frac{d^2\vec{r}(u)}{du^2} &= \{-2R(\cos u + 2\cos(2u)), -2R(\sin u + 2\sin(2u), 0\}; \\
\frac{d^3\vec{r}(u)}{du^3} &= \{2R(\sin u + 4\sin(2u)), -2R(\cos u + 4\cos(2u)), 0\}
\end{aligned} \tag{20}$$

Параметр u изменяется в следующих пределах $u \in [0; \pi/2]$, R=100мм. Поделим интервал $[0; \pi/2]$ на 15 равных частей, и по соотношениям (20) найдем соответствующие точки, принадлежащие кардеоиде и производные первого, второго и третьего порядков в этих точках. По формулам (19) вычислим погрешности. На рис. 6 – 9 приведены зависимости погрешностей от параметра. На рис.6 приведена погрешность $\delta(u)$, на рис. 7 – $\delta'(u)$, на рис. 8 – $\delta''(u)$, на рис. 9 – $\delta'''(u)$ В табл.1 приведены максимальные и средние значения погрешностей. Из рис. 6 – 9 видно, что наибольшие значения погрешности имеют вблизи границ интервала. Данные, приведенные в табл.1, показывают, что вычисление вторых и третьих производных при данном способе аппроксимации является неприемлемым ввиду очень больших значений погрешностей (случаи в и г).

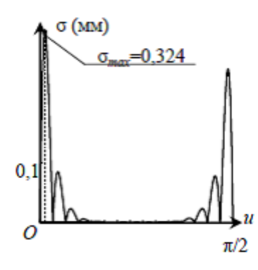

Рис. 6: Зависимость $\delta(u)$

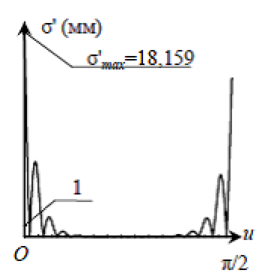

Рис. 7: Зависимость $\delta'(u)$.

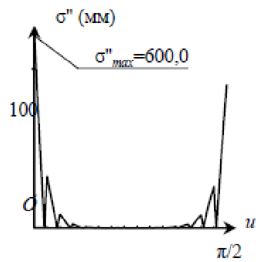

Рис. 8: Зависимость $\delta''(u)$

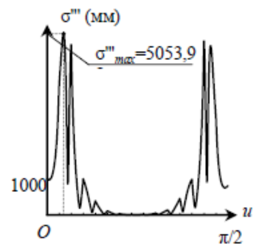

Рис. 9: Зависимость $\delta'''(u)$.

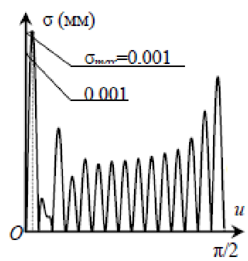

Рис. 10: Зависимость $\delta(u)$. Заданы касательные.

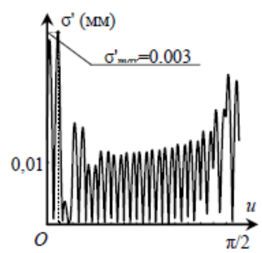

Рис. 11: Зависимость $\delta'(u)$. Заданы касательные.

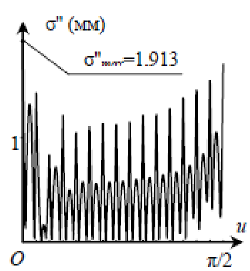

Рис. 12: Зависимость $\delta''(u)$. Заданы касательные.

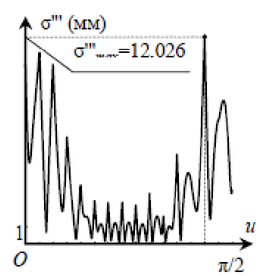

Рис. 13: Зависимость $\delta'''(u)$. Заданы касательные.

Таблица 1: Максимальные и средние значения погрешностей, при аппроксимации сплайнами со свободными концами.

Погрешность	Максимальное значение (мм)	Среднее значение (мм)
$\delta(u)$	0,324	0,034
$\delta'(u)$	18,159	1,052
$\delta''(u)$	600,0	42,665
$\delta'''(u)$	5053,984	935,255

6. Определение точности аппроксимации при использовании сплайнов с заданными касательными

Для повышения точности аппроксимации, при построении сплайнов (2), (3), (14), (15) задавались векторы касательных в их начальной и конечной точках. Как было отмечено выше, для аппроксимации линии имеются точки A_i, принадлежащие ей и соответствующие им параметры u_i . Методами численного дифференцирования найдем производные в начальной A_1 и конечной A_nточках. Эти векторы определялись с использованием интерполяционного многочленом Ньютона [1]. На рис. 10–13 и в табл.2 приведены полученные результаты.

Таблица 2: Максимальные и средние значения погрешностей сплайнами с заданными касательными.

Погрешность	Максимальное значение (мм)	Среднее значение (мм)
$\delta(u)$	0,0011	0,00028
$\delta'(u)$	0,0310	0,0098
$\delta''(u)$	1,913	0,525
$\delta'''(u)$	11,075	3,133

Выводы

Анализируя полученные результаты видим, что погрешности, в результате задания касательных в начальной и конечной точках сплайнов, уменьшились на несколько порядков. Таким образом, для наиболее точной аппроксимации необходимо задавать векторы касательных в начальных и конечных точках сплайнов и, по возможности, не брать точки находящиеся вблизи начальной и конечной из заданных точек.

Литература

[1] Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1975. – 631 с.

[2] Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики – Москва: Мир, 2001. – 604 с.

[3] Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. –М.: Мир, 1982. – 304 с.