Универсальный компьютерный коникограф*

Виктор Короткий, Людмила Хмарова
ospolina@mail.ru, ludmila_kh@list.ru
Челябинск, Россия, Южно-Уральский государственный университет,
Архитектурно-строительный факультет

Рассмотрены алгоритмы геометрически точного построения центра, главных осей, асимптот кривой второго порядка, проходящей через n заданных точек и касающейся m заданных прямых (n+m=5). Алгоритмы основаны на известных проективных свойствах кривых второго порядка. Предлагается проективно-синтетический способ графического программирования, не требующий алгебраических расчетов и использующий для своей конструктивной реализации простейшие графические примитивы – прямую и окружность.
Современное программное обеспечение САПР, основанное на полиномиальной аппроксимации, не предоставляет пользователю возможность построения кривых второго порядка, заданных произвольно указанным сочетанием пяти инциденций (точек и касательных). Существует более пятидесяти взаимно непротиворечивых сочетаний точек и касательных, задающих на плоскости кривую второго порядка. В этих сочетаниях возможно как присутствие несобственных элементов, так и различные варианты инцидентности данных точек и касательных. Для каждого из сочетаний составлен графический проективный алгоритм построения КВП.
На основе разработанных алгоритмов составлена Lisp-программа, объемом около 40 Kb. Программа обеспечивает возможность указания на экране дисплея заданного набора инциденций (точек и касательных), автоматическое построение главных осей, асимптот и фокусов искомой кривой второго порядка, а также ее вычерчивание. При реализации алгоритмов используются простейшие графические операции (построение прямых линий и окружностей и поиск точек их пересечения), поэтому точность построения главных осей искомой КВП соответствует точности выполнения указанных операций в используемом графическом пакете. Предложенный алгоритм может быть реализован на любом графически ориентированном алгоритмическом языке.
Рассмотрены примеры геометрического моделирования гладких каркасно-сетчатых поверхностей с использованием кривых второго порядка в качестве основного формообразующего элемента. Показана возможность конструирования гладких поверхностей, обеспечивающих плавный переход между заданными плоскими поперечными сечениями: прямоугольным и круговым, квадратным и треугольным. При этом промежуточные поперечные сечения формируются как замкнутые обводы первого порядка гладкости, составленные из кривых второго порядка.

Ключевые слова: *проективные алгоритмы, теорема Паскаля, инволюция сопряженных диаметров, гомология, родственное соответствие, составные кривые.*

1. Введение

Коникограф – механизм для вычерчивания кривых второго порядка (КВП). Большое количество таких шарнирно-рычажных конструкций можно найти в книгах И.И. Артоболевского, В.В. Добровольского. Один из первых механизмов для вычерчивания конического сечения, проходящего через пять заданных точек, был указан еще И. Ньютоном. Устройство, в котором движение точки по кривой второго порядка вызывается движением некоторой другой точки по прямой линии, устанавливает (механическим путем) точечное квадратичное соответствие на плоскости: точкам прямой линии соответствуют точки на кривой второго порядка.

Потребность в механических устройствах исчезла в связи с появлением средств компьютерной графики. Но не исчезла потребность в кривых второго порядка. Эти кривые, связанные с фундаментальными законами природы, играют совершенно особую роль, как в естественных науках, так и в прикладных технических задачах.

Тем не менее, современное программное обеспечение графически ориентированных САПР, основанное на полиномиальной аппроксимации [1], не предоставляет пользователю возможность построения кривых второго порядка. В прикладных графических пакетах применяются полиномы третьего и более высоких порядков, но не предусмотрено вычерчивание кривой второго порядка, проходящей через заданные точки и касающейся данных прямых.

Складывается впечатление, что в современной прикладной геометрии нет места не только механическим коникографам, но и собственно кривым второго порядка. Взамен устаревших чертежных механизмов не появились эквивалентные им электронные аналоги. Ни в одном программном продукте нет возможности геометрически точно построить центр, главные оси, фокусы, асимптоты кривой второго порядка, проходящей через произвольно

*Работа опубликована по гранту РФФИ №16-07-20482

указанные точки, в том числе несобственные, и касающейся произвольно указанных прямых (геометрически точным называют построение, в котором используются только окружность и прямая линия). Разнообразные итерационные процедуры, применяемые в CAD, обеспечивают требуемую практическую точность, но при этом не являются геометрически точными.

Может быть, вместе с механическими устройствами для вычерчивания коник ушли в историческое небытие и сами конические сечения? Но ведь это не так. Тогда почему в CAD-системах нет универсального компьютерного коникографа, способного вычерчивать и находить каноническое уравнение коники, заданной любым набором пяти линейных инциденций (точек и касательных)? На этот вопрос могут быть лишь два ответа: либо кривые второго порядка не нужны в прикладной геометрии, либо разработчики программного обеспечения не в состоянии обеспечить соответствующую опцию.

2. Постановка задачи

На плоскости указаны n точек и m прямых (n+m=5). Одна или две точки могут быть несобственными. Одна из прямых может быть несобственной. Требуется разработать алгоритм и программный модуль построения метрики (центра, главных осей и т.п.) кривой второго порядка, проходящей через данные точки и касающейся данных прямых.

На взаимное положение указанных точек и прямых накладываются ограничения: точки и прямые действительны; каждая прямая (точка) инцидентна не более, чем одной из данных точек (прямых); точки не коллинеарны по три; любая тройка прямых не инцидентна одной точке; точки не должны находиться в разных областях, на которые проективная плоскость разделена данными прямыми. Существует более пятидесяти сочетаний точек и касательных, удовлетворяющих указанным ограничениям.

Для решения задачи использован синтетический метод, основанный на известных проективных свойствах кривых второго порядка [2]. Синтетические алгоритмы построения КВП, будучи реализованы на компьютере, значительно превосходят алгебраические методы в простоте и наглядности, совпадая с ними по точности получаемых результатов. Присутствие несобственных элементов в наборе исходных инциденций не имеет существенного значения при конструктивной реализации проективных алгоритмов, что также является преимуществом синтетического метода.

Отсутствие в современных CAD-системах соответствующего программного модуля можно объяснить тем, что традиционные методы программирования, основанные на матричной алгебре и координатных расчетах, приводят к громоздким, специализированным алгоритмам. Большое количество вычислительных процедур, связанных с координатными расчетами, неизбежно приводит к потере точности. В то же время альтернативный проективно-синтетический способ графического программирования, вообще не требующий алгебраических расчетов и использующий для своей реализации лишь простейшие графические примитивы (прямая, окружность), вероятно, недостаточно известен разработчикам программного обеспечения САПР.

3. Основной алгоритм

Требуется построить вершины и асимптоты КВП, проходящей через пять точек 1, 2,...5, одна или две из которых могут быть несобственными, и начертить непрерывную кривую.

Действие 1. Построение инволюции сопряженных диаметров искомой коники

Проводим хорды 3-7 и 4-6, параллельные хордам 1-5 и 2-3 (дополнительные точки 6, 7, принадлежащие искомой конике, определяются по теореме Паскаля).

Через середины найденных хорд проводим диаметры a и b, пересекающиеся в центре O искомой коники (рис. 1). Каждый диаметр вместе с сопряженной ему хордой образует пару сопряженных направлений. Получаем инволюцию в пучке O, заданную двумя парами сопряженных диаметров $a \sim a'$, $b \sim b'$, где a'||(1-5), b'||(2-3). Если сопряженные пары диаметров не разделены, то инволюция в пучке – гиперболическая, а искомая КВП – гипербола (см. рис. 1, а). Разделенность пар $a \sim a'$, $b \sim b'$ позволяет классифицировать искомую КВП как эллипс (см. рис. 1, б). Пять точек параболы связаны некоторой геометрической зависимостью из-за дополнительного условия в виде несобственной касательной, поэтому построение параболы, проходящей через пять произвольно заданных точек, невозможно из-за избыточности условий инцидентности.

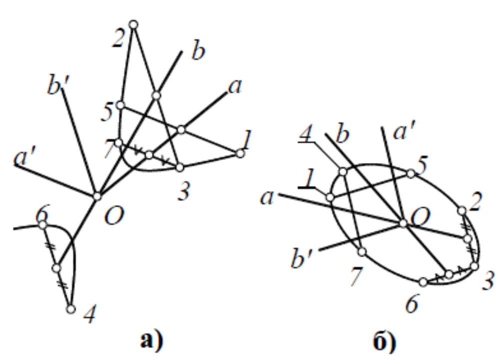

Рис. 1: Инволюция сопряженных диаметров

Если среди данных точек 1, 2,...5 имеются одна или две несобственные точки, то это обстоятельство не затрудняет поиск дополнительных точек искомой коники (по теореме Паскаля) и последующее построение инволюции сопряженных диаметров.

Действие 2. Построение главных диаметров и асимптот

Переносим инволюцию сопряженных диаметров $O(a \sim a', b \sim b')$ на окружность r произвольного радиуса, проходящую через центр O (рис. 2). Лучи a, a' и b, b' пересекают окружность r в двух парах соответственных точек $A \sim A'$ и $B \sim B'$, которые определяют гиперболическую (рис. 2, а) или эллиптическую (рис. 2, б) инволюцию точек на окружности r. Центр S этой инволюции находится на пересечении прямых A-A' и B-B'. Луч SR, проходящий через центр R окружности r, высекает на r пару соответственных точек $D \sim D'$. Прямые d=OD и d'=OD' взаимно перпендикулярны (угол DOD' опирается на диаметр окружности) и соответствуют друг другу в инволюции сопряженных диаметров. Следовательно, d и d' – главные диаметры искомой кривой: гиперболы (см. рис. 2, а) или эллипса (см. рис. 2, б).

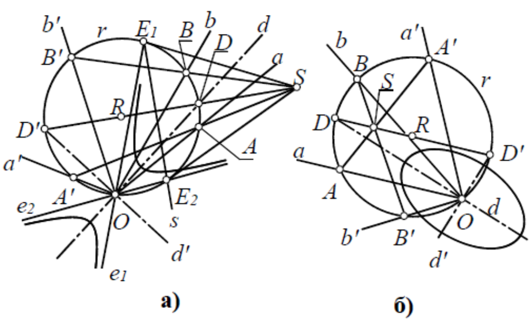

Рис. 2: Построение главных осей и асимптот

Для определения асимптот гиперболы требуется построить ось s инволюции. Прямая s пересекается с r в двойных точках E_1 и E_2, через которые проходят искомые асимптоты e_1 и e_2 (см. рис. 2, а).

Таким образом, второе действие алгоритма, как и первое, не требует сложных построений. Достаточно стереографически спроецировать инволюцию $O(a \sim a', b \sim b')$ сопряжение диаметров искомой коники на произвольную окружность, затем в инволюции на окружности найти ось и центр, которые немедленно указывают главные диаметры d и d' искомой КВП, а для гиперболы – еще и асимптоты e_1, e_2.

Действие 3. Построение вершин

Если искомая КВП классифицирована как гипербола и найдены ее асимптоты e_1 и e_2, то выделяем угол, образованный асимптотами, и вписываем в него окружность g произвольного радиуса (рис. 3). Получаем гомологию "гипербола-окружность" с центром S=O, в которой точке C искомой гиперболы соответствует точка C_0 окружности g, а точке касания E_0 соответствует несобственная точка E_∞ гиперболы (здесь C – одна из данных точек 1, 2,...5). Построив ось n гомологии, находим вершину D гиперболы как точку, гомологически соответствующую точке D_0 окружности.

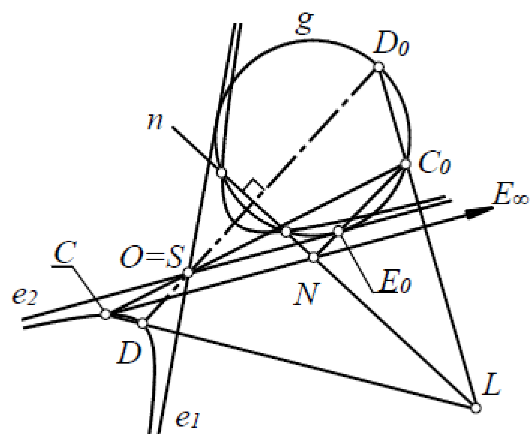

Рис. 3: Построение вершин гиперболы

Если искомая КВП – эллипс, то целесообразно связать его с окружностью не гомологией, а родственным соответствием. Находим направление c', сопряженное направлению c=OC, где C – одна из данных точек 1, 2,...5. Для этого через центр O эллипса проводим произвольную окружность k. Пучок $O(a \sim a', b \sim b')$ сопряженных диаметров высекает на k инволюцию $A_0 \sim A_0'$, $B_0 \sim B_0'$. Определив ее центр $S = A_0A_0' \cap B_0B_0'$, находим точку C_0', сопряженную точке $C_0 = OC \cap k$. Точка C_0' указывает направление $c' = OC_0'$, сопряженное направлению c (рис. 4, а).

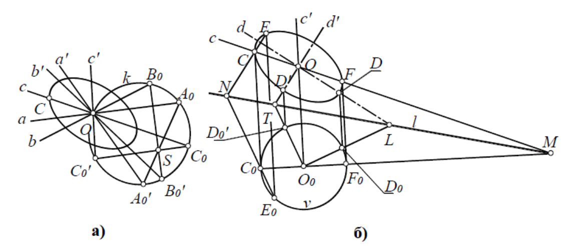

Рис. 4: Построение вершин эллипса

Составляем родственное соответствие искомого эллпса и вспомогательной окружности v, выбрав направление родства параллельно c'. Окружность v вписана в пару прямых, касательных к эллипсу в концах его диаметра CF (эти прямые параллельны направлению родства c'). Ось родства l определена точками $M = CF \cap C_0F_0$ и $N = CE \cap C_0E_0$ пересечения соответственных прямых, где точка E симметрична точке C относительно главной оси d (рис. 4, б). В составленном родстве взаимно перпендикулярным главным диаметрам d=OL и d'=OT соответствуют взаимно перпендикулярные прямые O_0L и O_0T, которые высекают на окружности v пару точек D_0, D_0'. Этим точкам родственно соответствуют искомые вершины эллипса D и D'.

Таким образом, для построения вершин и асимптот КВП, проходящей через пять данных точек, потребовалось выполнить всего три действия, которые сводятся к простейшим графическим операциям: построению окружности, определению точек пересечения прямой и окружности и проведению прямой через две точки.

Действие 4. Вычерчивание непрерывной кривой

Эллипс с известными вершинами (главными осями) вычерчивается стандартными средствами любого графического пакета. Для вычерчивания гиперболы, вершины и асимптоты которой известны, могут использоваться средства 3D-моделирования. Смоделируем 3D-конус вращения, принимая известные асимптоты гиперболы за его образующие. Рассекаем конус плоскостью Σ, параллельной оси вращения конуса. Если расстояние от оси до секущей плоскости равно длине мнимой полуоси, то в сечении получаем искомую гиперболу.

4. Дополнительные алгоритмы

Имеются шесть различных сочетаний n точек и m касательных, определяющих кривую второго порядка: пять точек (двойственное сочетание – пять касательных); четыре точки и касательная (четыре касательные и точка); три точки и две касательные (три касательные и две точки). В указанных сочетаниях возможно как присутствие несобственных элементов, так и различные варианты инцидентности данных точек и касательных. Например, в сочетании "две касательные, три точки" две из трех заданных точек могут быть инцидентны данным касательным, а в сочетании "пять касательных" одна из них может быть несобственной (парабола). С учетом всех возможных вариантов инцидентности получаем 53 специализации, для каждой из которых составлен соответствующий графический проективный алгоритм построения КВП.

5. Программная реализация

На основе разработанных алгоритмов составлена Lisp-программа, объемом около 40 Kb. Программа обеспечивает возможность указания на экране дисплея заданного набора инциденций (точек и касательных), автоматическое построение главных осей, асимптот и фокусов искомой кривой второго порядка, а также ее вычерчивание. При реализации алгоритма используются простейшие графические операции (построение прямых линий и окружностей и поиск точек их пересечения), поэтому точность построения главных осей искомой КВП соответствует точности выполнения указанных операций в используемом графическом пакете. Предложенный алгоритм может быть реализован на любом графически ориентированном алгоритмическом языке.

Программа составлена для трех специализаций: построение КВП по пяти точкам; по пяти касательным, одна из которых может быть несобственной; по трем точкам, в двух из которых указаны касательные. Для построения кривой второго порядка, заданной другим набором инциденций, надо предварительно найти дополнительные элементы (точки или касательные) искомой кривой, чтобы получить одну из трех запрограммированных специализаций.

6. Примеры

Одним из основных способов моделирования поверхностей является кинематический способ, при котором поверхность задают движением образующей кривой переменной формы по направляющим линиям. В частности, в качестве образующей могут использоваться кусочно-гладкие составные кривые, образованные участками конических сечений. Известен, например, метод Лайминга, в соответствии с которым для формирования поперечных сечений фюзеляжа самолета используются сегменты КВП [4].

Пример 1. Сконструировать конфузор (воздухозаборник) с прямоугольным входным и круглым выходным поперечными сечениями (рис. 5, а). Продольные криволинейные направляющие, моделирующие линии ламинарного течения, рассчитываются методами газодинамики. Поперечные сечения формируются как замкнутые дважды симметричные обводы первого порядка гладкости, составленные из сегментов кривых второго порядка. Например, участок обвода 1-2-3 – часть гиперболы, проходящая через точку 2 продольной направляющей. В точках 1 и 3 указаны касательные, параллельные сторонам BC и AB входного

прямоугольного сечения. Кривая второго порядка, в соответствии с методом инженерного дискриминанта [3], вполне определена точками 1, 2, 3 и касательными в точках 1, 3. Получена гладкая каркасно-сетчатая поверхность с указанным алгоритмом уплотнения каркаса. Любое поперечное сечение представляет собой гладкую кривую, составленную из четырех одинаковых сегментов кривой второго порядка. Программное средство позволяет не только вычерчивать сегменты поперечных сечений, но и определять коэффициенты канонического уравнения каждого сегмента.

Пример 2. Сконструировать гладкую (без складок и изломов) переходную поверхность между квадратным и треугольным поперечными сечениями (рис. 5, б). Простейший переход обеспечивается с

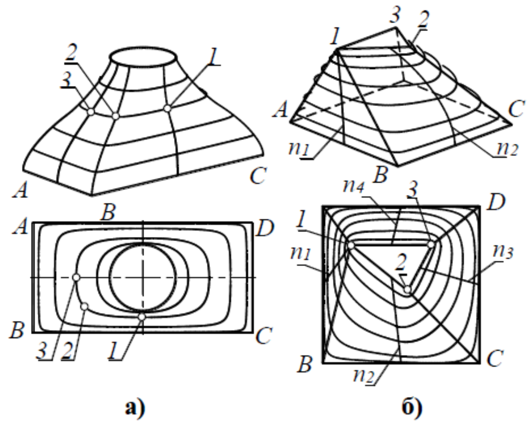

Рис. 5: Поверхности перехода

помощью косых плоскостей Σ(1-B, 2-C) и Γ(2-C, 3-D) с горизонтальной плоскостью параллелизма. Добавляя плоские грани A-1-B и A- 1-3-D, получаем линейчатую поверхность перехода с четырьмя ребрами. Для ее сглаживания вводим в рассмотрение дополнительные криволинейные направляющие n1,...n4. Изменение "полноты" конструируемой поверхности обеспечивается за счет изменения формы дополнительных направляющих. В произвольном горизонтальном сечении h получаем замкнутый обвод, состоящий из четырех различных сегментов кривых второго порядка с общими касательными в точках сопряжения. По мере изменения высоты сечения h замкнутый обвод непрерывно меняет свою форму от квадрата ABCD до треугольника 123; при этом одна из четырех составляющих обвода вырождается в точку 1. Получаем гладкую каркасно-сетчатую поверхность с однозначно определенным алгоритмом уплотнения линий каркаса.

7. Заключение

Разработан пакет алгоритмов и программ для определения центра, осей, фокусов, асимптот, коэффициентов канонического уравнения кривой второго порядка, проходящей через произвольно указанные n точек и касающейся произвольно указанных m прямых (n+m=5). Такое программное средство с полным основанием можно назвать универсальным коникографом – устройством для вычерчивания конических сечений. Использованный для решения задачи проективно-синтетический способ графического программирования никак не связан с декартовой системой координат и не требует выполнения каких-либо алгебраических расчетов. Для конструктивной реализации алгоритмов применяются лишь простейшие графические примитивы – прямая и окружность. Универсальный коникограф может быть эффективно использован при решении прикладных задач геометрического моделирования, в которых участвуют кривые второго порядка в качестве формообразующих элементов.

Литература

[1] Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. – М.: Физматлит, 2012. – 472 с.

[2] Ефимов Н.В. Высшая геометрия. – М.: Физматлит, 2003. – 584 с.

[3] Иванов Г.С. Начертательная геометрия. – М.: Машиностроение, 1995. – 224 с.

[4] Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. – М.: Мир, 1982. – 304 с.