Геометрическое моделирование решений задач начертательной геометрии средствами САПР

А.А. Ляшков, К.Л. Панчук

Кафедра инженерной геометрии и систем автоматизированного проектирования

Омский государственный технический университет

3Dogibmod@mail.ru. Panchuk_KL@mail.ru

Аннотация

В статье рассмотрено использование некоторых возможностей современных CAD–систем для решения задач начертательной геометрии. Показано, что наиболее естественным решением многих задач начертательной геометрии является их реализация в модельном пространстве, т.е. в пространстве геометрического моделирования, с последующим переходом к чертежу (в пространство листа). Как для выполнения чертежа, так и для создании 3D-модели решаемой задачи, необходимы знания алгоритмов конструктивного моделирования, методов решений позиционных и метрических задач и как минимум – элементарной геометрии. Необходимость в этих знаниях продемонстрирована при рассмотрении решений ряда задач начертательной геометрии.

Ключевые слова: *начертательная геометрия, модельное пространство, пространство листа.*

1. ВВЕДЕНИЕ

Традиционное, т.е. «ручное», решение задач начертательной геометрии выполняется на основе ее методов и алгоритмов [2, 3]. Появление электронного инструментария в виде различных CAD-систем с широкими возможностями его использования для решения задач начертательной геометрии вызывает необходимость перестройки учебного процесса по геометрографическим дисциплинам, в том числе по базовой дисциплине – начертательной геометрии. В последнем случае опорными элементами перестройки являются:

1. *Геометрические знания*. Знания школьной геометрии [1] и основ начертательной геометрии [2,3] являются теоретической базой 3D-моделирования решений задач начертательной геометрии.

2. *3D-моделирование*. Оно позволяет получать пространственное решение задачи, от которого, при необходимости, можно перейти к плоскому чертежу.

3. *Непрерывная взаимосвязь* накопления геометрических знаний и совершенствования навыков их реализации средствами CAD-систем. Знания первичны [4].

2. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Принципиальное отличие предлагаемых решений от традиционных в начертательной геометрии заключается в том, что исходные данные задаются не на комплексном чертеже, а в модельном пространстве. Алгоритм решения задачи в пространстве реализуется в модельном пространстве электронными средствами. Это является более логичным в сравнении с традиционными подходами. Полученные модели и результат решения могут быть отображены как на основные плоскости проекций, так и на дополнительные. Следует заметить, что на этапах задания исходных данных и формирования алгоритма решения задачи в модельном пространстве необходимы знания элементарной геометрии, соответствующих методов и алгоритмов начертательной геометрии. Последующее выполнение решения задачи в пространстве не сводится к механическому стереотипному получению результата, а предполагает осмысленное творческое построение геометрической модели и выбор соответствующего метода и алгоритма решения задачи. Важно, что во многих случаях получение чертежа решения задачи на плоскости по полученной 3D-модели является вторичным. Сказанное выше проиллюстрируем рядом примеров.

3. ПРИМЕР 1

Пусть даны скрещивающиеся прямые m и n. Требуется определить расстояние между заданными прямыми. 3D-модель скрещивающихся прямых m и n представлена на рисунке 1.

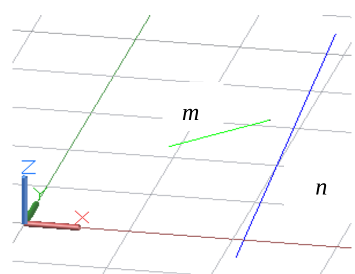

Рис. 1. **3D-модель скрещивающихся прямых**

Вариант 1. Основывается на известном в начертательной геометрии методе замены плоскостей проекций. На рисунке 2 показаны проекции 3D-модели на исходные плоскости проекций Π_1 и Π_2, а затем и на дополнительные плоскости Π_4 и Π_5. Реализации задачи в таком варианте принципиально не отличается от ее реализации на чертеже вручную. Ускорение решения задачи с применением САПР достигается за счет автоматического построения проекций прямых на дополнительные плоскости после задания их следов. Для решения задачи необходимо знание метода замены плоскостей проекций.

Вариант 2. Основывается на построении отрезка, определяющего искомое расстояние, на пространственной модели. Известно, что расстояние между скрещивающимися прямыми m и n равно расстоянию между двумя параллельными плоскостями, в которые можно заключить эти прямые.

В этом случае алгоритм решения задачи будет следующим: 1) через точку M на прямой m проводим прямую n^1, параллельную n, а через точку N на прямой n – прямую m^1, параллельную прямой m (рис. 3); пересекающиеся прямые $m \cap n^1$ и $n \cap m^1$ задают параллельные плоскости, расстояние между которыми и является искомым;

2) строим ортогональную проекцию прямой n^1 на отсек плоскости $n \cap m^1$. Тогда отрезки 1-1^1 и 2-2^1 определяют искомое расстояние, причем отрезок 2-2^1 проходит через линию кратчайшего расстояния между заданными прямыми.

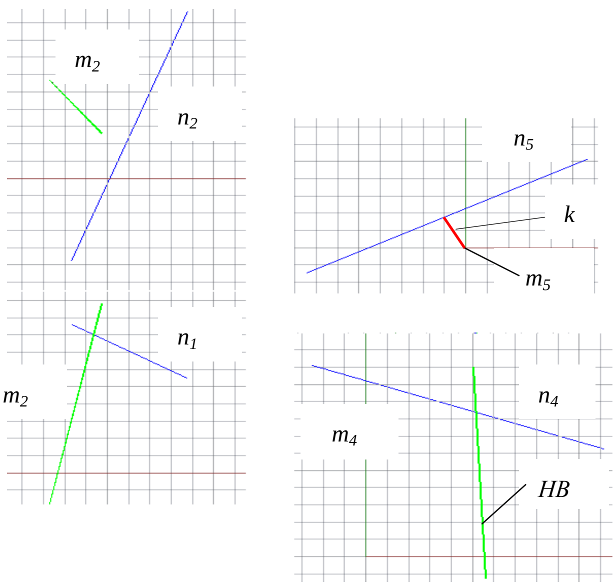

Рис. 2. **Определение расстояния между скрещивающимися прямыми на комплексном чертеже**

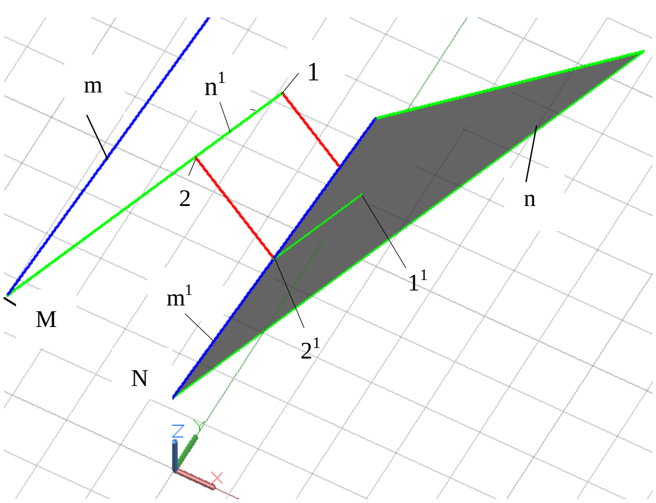

Рис. 3. **3D-модель скрещивающихся прямых линий и расстояния между ними**

Ортогональные проекции полученной 3D-модели на координатные плоскости приведены на рис. 4. В отличие от 3D-модели здесь, для определения величины искомого расстояния, требуются дополнительные построения (на рис. 4 они не показаны).

4. ПРИМЕР 2

Построить сферу, которая касается двух заданных сфер и проходит через точку K, причем точка K и центры трех сфер: заданных и искомой, должны принадлежать одной плоскости. Один из вариантов 3D-модели исходных данных приведен на рис. 5.

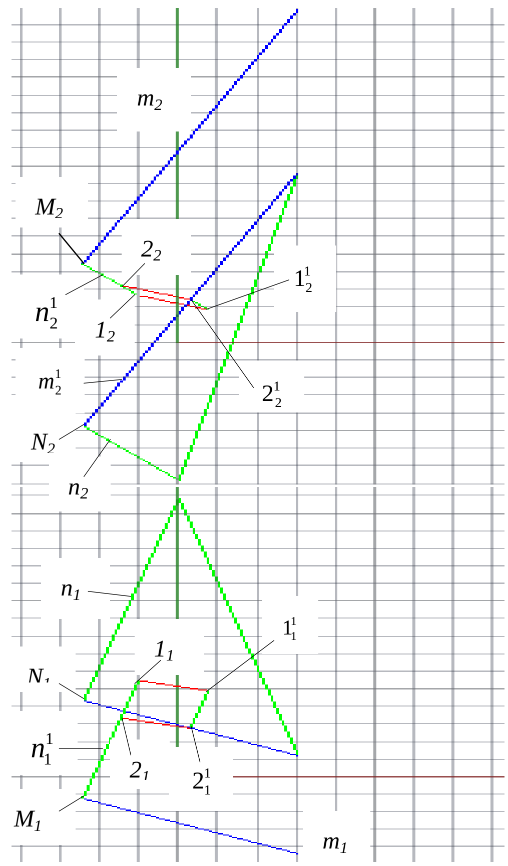

Рис. 4. **Проекции 3D-модели на координатные плоскости**

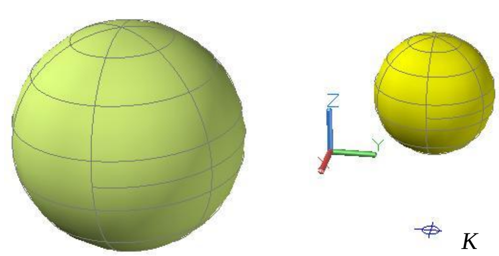

Рис. 5. **3D-модель исходных данных**

Анализ решения.

Поскольку центры трех сфер, одна из которых – искомая, принадлежат некоторой плоскости Q, то последняя пересекает каждую сферу по экваториальной окружности. Следовательно, касание трех сфер сводится к касанию их экваториальных окружностей. Учитывая принадлежность точки K плоскости Q, приходим к выводу о том, что решение исходной задачи основывается на построении окружности, проходящей через точку K и касающейся двух заданных окружностей. Получаем частный случай задачи Аполлония с четырьмя решениями.

Решение.

Через точку K и центры заданных сфер проводим плоскость, которой будет принадлежать центр искомой сферы (рис.6). Плоскость задана на 3D-модели своим отсеком. На рисунке приведен разрез исходных сфер проведенной плоскостью.

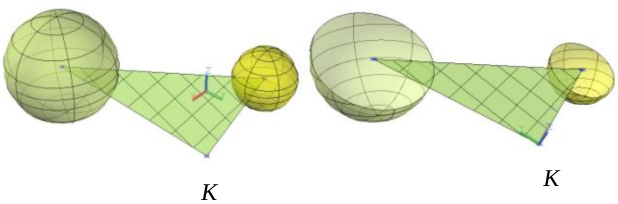

Рис. 6. **3D-модель исходных данных, отсека плоскости центров сфер и разрез исходных сфер плоскостью**

Для определения центра искомой сферы вначале строятся окружности, проходящие через точку K и касающиеся сечений – экваториальных окружностей исходных поверхностей плоскостью центров (рис. 7а).

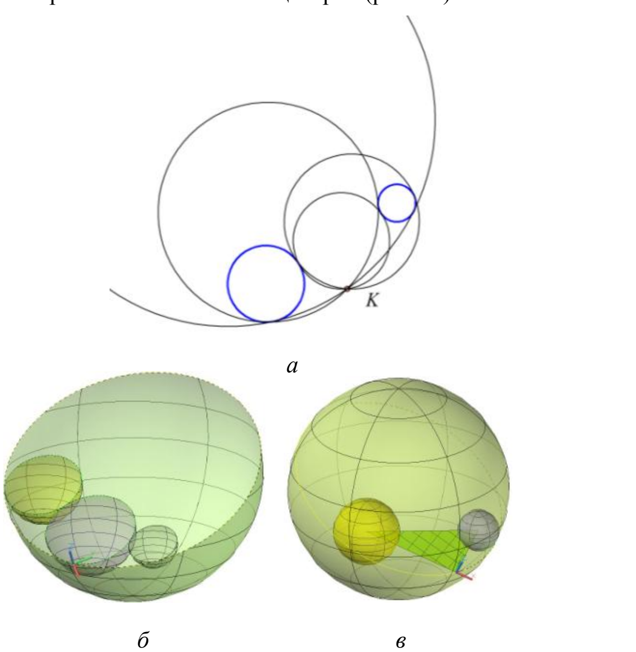

Рис. 7. **Геометрические модели решения задачи: а) сечения – экваториальные окружности исходных и искомых сфер; б) разрез исходных и части искомых сфер; в) полные модели исходных и одной из искомых сфер**

Для ускорения построений могут быть использованы возможности графического редактора САПР. Полученные четыре окружности определяют в общем случае четыре решения поставленной задачи. На рисунке 7б показаны в разрезе исходные и две из четырех искомых полусферы, а на рис. 7в – соответствующие полные модели исходных и одной из искомых сфер.

5. ПРИМЕР 3

Построить сферу радиуса R, которая касается двух заданных сфер и проходит через точку K. Один из вариантов 3D-модели исходных данных представлен на рис. 5.

Анализ одного из возможных решений.

Центры сфер заданного радиуса, касающихся исходных сфер, одинаково удалены от этих поверхностей. Если R_1 – радиус первой сферы, а R_2 – радиус второй сферы, то геометрическим местом центров сфер, удаленных от заданных на величину R, будет окружность, находящаяся в пересечении сфер радиусов R_1+R и R_2+R. Эти сферы являются эквидистантами исходных сфер. Их центры совпадают с центрами заданных сфер. Из получаемого однопараметрического множества сфер нужно найти ту из них, что проходит через заданную точку K. Исходя из приведенного анализа, предлагается следующая модель решения задачи.

Решение.

1. Строим эквидистанты заданных сфер и определяем их линию пересечения – окружность m (рис. 8).

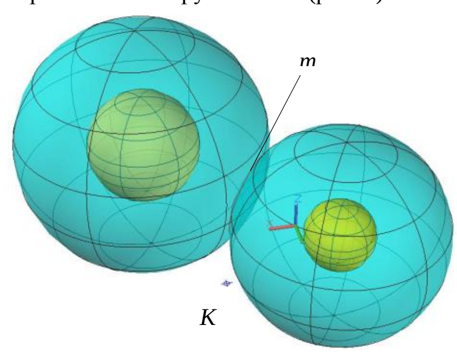

Рис. 8 **Исходные сферы, их эквидистанты и линия *m* пересечения этих эквидистант**

2. Строим сферу радиусом R с центром в заданной точке K (рис. 9).

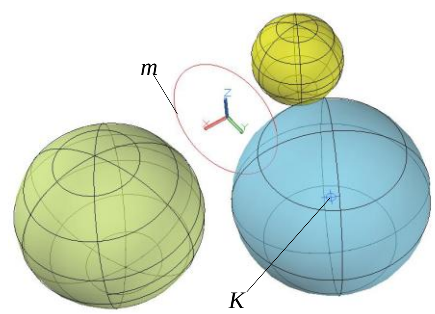

Рис. 9 **Исходные сферы, линия *m* пересечения эквидистант и сфера с центром в заданной точке *K***

3. Определяем центры O_1 и O_2 искомых сфер как точки пересечения окружности m и вспомогательной сферы (рис. 10). Отсюда следует, что для рассматриваемых условий поиска сфер задача имеет два решения.

4. Строим одну из искомых сфер с центром в точке O_2, которая имеет заданный радиус R и проходит через заданную точку K (рис. 11).

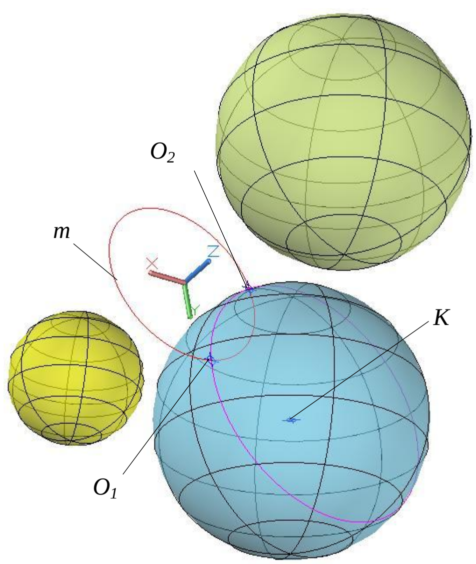

Рис. 10 **Определение центров O_1 и O_2 искомых сфер**

Для наглядности исходные сферы и одна из полученных разрезаны плоскостью, проходящей через их центры (рис.12).

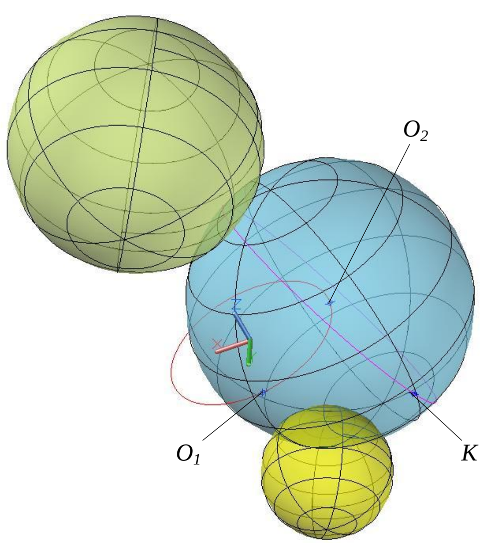

Рис. 11. **3D-модель исходных данных и одной из искомых сфер**

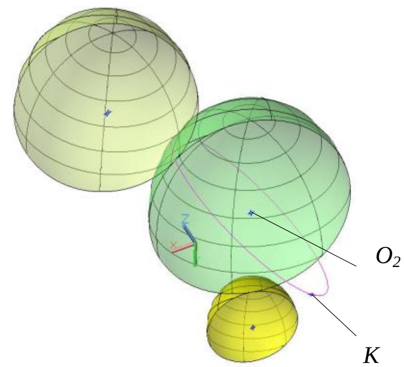

Рис. 12. **Разрез 3D-модели решения задачи плоскостью**

6. ВЫВОДЫ

Рассмотренные выше примеры компьютерной реализации алгоритмов решений задач начертательной геометрии позволяют сделать следующие выводы:

1. Алгоритмы конструктивных решений задач могут быть реализованы в модельном пространстве и в пространстве листа (чертежа). Для решения одних задач достаточно использовать только модельное пространство, для других – пространство листа, для третьих – и то и другое. Во всех случаях средствами компьютерной графики возможен переход от пространства модели к пространству листа.

2. Процесс обучения теоретическим основам и практическим приложениям начертательной геометрии необходимо строить во взаимосвязи накопления знаний теории методов и алгоритмов начертательной геометрии и совершенствования навыков их электронной реализации средствами компьютерной графики.

7. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Атанасян Л. С. *Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, А. С. Рылов, А. В. Тронин. – 12-е изд., перераб. и испр. – М. : Изд-во «Экзамен». – 2012. – 255 с.*

[2] *Иванов Г. С. Начертательная геометрия: учебник / Г. С. Иванов. –3-е изд.–М.: Изд. моск. гос. ун-та леса, 2012.– 340 с.*

[3] *Геометрическое моделирование в инженерной и компьютерной графике: учеб. пособие / К. Л. Панчук, А. А. Ляшков, Н. В. Кайгородцева, Л. М. Леонова. – Омск: Изд-во ОмГТУ, 2015. – 445 с.*

[4] Панчук К.Л. *Геометрическое моделирование. Теоретический, инструментальный и образовательный аспект. / К.Л. Панчук, А.А. Ляшков – Всероссийское совещание заведующих кафедрами инженерно-графических дисциплин технических вузов. п. Дивногорское, 26-28 мая 2015 г. Ростов-на-Дону, ДГТУ, 2015. – С. 92-121.*

Об авторах

Алексей Ануфриевич Ляшков, профессор кафедры инженерной геометрии и САПР. Email: 3dogibmod@mail.ru.

Константин Леонидович Панчук, профессор кафедры инженерной геометрии и САПР. Email: Panchuk_Kl@mail.ru.