Тройственность подхода к задачам преобразования пространства функционально-воксельной модели*

А.В. Толок, Е.А. Лоторевич
a.tolok@stankin.ru| ealotorevich@gmail.com
МГТУ «Станкин», г. Москва, Россия

Работа посвящена применению воксельных геометрических моделей (ВГМ) для решения задач визуальной компоновки сложного функционального пространства. В статье отражена тройственность вычислительного подхода к задачам преобразования пространства для визуальной компоновки воксельных геометрических моделей представленных локальными геометрическими характеристиками (ЛГХ). Приведены примеры компоновки пространства ВГМ размерности E^3 .

Ключевые слова: *Воксельная геометрическая модель, метод функционально-воксельного моделирования, визуальная компоновка сложного функционального пространства, локальные геометрические характеристики.*

Введение.

Создание архитектуры вычислений, основанной на применении воксельной графической информации, позволяет разрабатывать альтернативные способы решения задач геометрического моделирования. Метод функционально-воксельного моделирования (ФВМ) [1] реализует один из таких компьютерно-графических подходов к решению класса задач математического моделирования, приводимых к геометрической постановке. Однородность структуры воксельных геометрических моделей, основанных на описании локальными геометрическими характеристиками, закладывает основу для создания альтернативных алгоритмов пространственных преобразований. Согласованность ВГМ и исходной функции позволяет оценить правильность выполненных преобразований. Предлагаемые в работе [1] операторы перехода G, C, N, X, формируют матричный аппарат, устанавливающий согласованность исходной аналитической функции с ее воксельным представлением ($F-$ и $V-$представления соответственно).

Постановка задачи.

Тройственность подхода к преобразованию пространства подразумевает получение одного и того же результата преобразования пространства функционально-воксельной модели тремя способами: функциональным (традиционным аналитическим способом), функционально-воксельным и воксельным.

Функциональный способ представляет собой преобразование значений функции, заданной аналитическим способом, с помощью формул преобразования координат, когда в соответствие координатам $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ в n -мерном пространстве после преобразования, соответствует набор координат $\{x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\}$.

Работа опубликована по гранту РФФИ №16-07-20482.

В конечном итоге преобразованное функциональное пространство $f'(x_n)$ из исходного $f(x_n)$ является переходом $f(x_n) \to f(x'_n)$ путем преобразования координатного пространства $[x'_1\, x'_2\, \ldots\, x'_n] = [x_1\, x_2\, \ldots\, x_n]P$, в котором P - матрица сконструированных преобразований. На следующем этапе по вновь полученной аналитической $f'(x_n)$ модели создается ВГМ [2].

Функционально-воксельный способ преобразования подразумевает использование ВГМ в качестве операнды. Инструментом, используемым при преобразовании, выступают те же матричные преобразования координат. Для реализации данного подхода, необходимо, используя ВГМ, выразить в явном виде координату $x_i = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из уравнения касательной, найдя, таким образом, значение функции в точке. Все дальнейшие пространственные преобразования выполняются над полученными значениями поверхности функции.

После выполнения преобразований по вновь полученным значениям функции формируется ВГМ.

При воксельном способе преобразования так же, как и при функционально-воксельном подразумевается использование ВГМ с той лишь разницей, что для выполнения преобразования нет необходимости находить значение функции в явном виде и, как следствие, выполнять вокселизацию функционального пространства. Для реализации данного подхода необходимо использовать специальные геометрические модели [3], которые отображают взаимосвязи между компонентами нормали – локальными геометрическими характеристиками.

В отличие от традиционного координатного представления пространства функции, где приведение этой функции к явному виду заключается в выражении одной из координат через остальные, в ВГМ каждой точке пространства соответствует множество компонентов нормали, определяющие пространственное положение окрестности этой точки. Данная особенность накладывает условие на пространственные преобразования: преобразование ВГМ должно учитывать изменение структуры индексного массива значений в зависимости от типа преобразования.

Изменение в массиве значений сводится к матричному преобразованию системы координат для смещения, где вместо привычных координат пространства $Oxyz$, используются индексы массива, представляющего воксельное пространство ijk, при повороте – использованию специального алгоритма последовательного заполнения индексного массива значений с учетом величины угла поворота и пропорциональному изменению количества элементов массива значения при масштабировании. Алгоритм последовательного заполнения (см. Рис. 1) построен по следующему принципу:

1. Заполнение ячеек получаемого массива происходит последовательно;
2. В качестве информации, заносимой в получаемый массив значений, выступает информация из ячейки, отстоящей от текущей ячейки на угол поворота вокруг центра вращения.

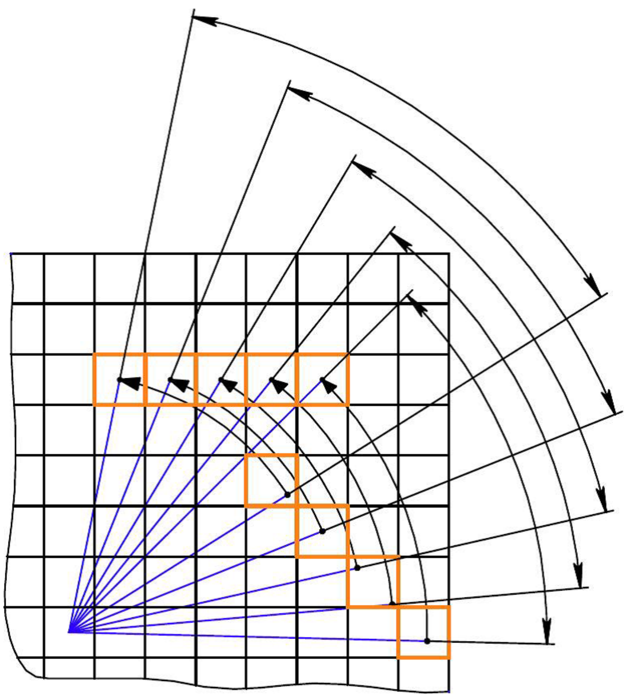

Рис. 1: Последовательное заполнение индексного массива с учетом угла поворота

Данный способ преобразования массива значений позволяет получать однородные геометрические модели, лишенные понятия муар.

При масштабном увеличении вдоль оси для сохранения целостности ВГМ, появившиеся дополнительные элементы массива значений необходимо заполнить промежуточными значениями. В качестве способа заполнения при увеличении используется способ одиночной связи (ближайшего соседа), дополненный билинейной интерполяцией для определения промежуточных значений. При уменьшении ближайшее известное значение функции заносится в определенную масштабом ячейку с одновременной корректировкой направления вектора нормали.

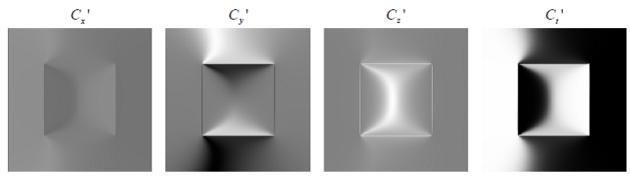

Рис. 2: Результат смещения функции квадрата вдоль оси OX

Рассмотрим отдельно воксельные преобразования сдвига, поворота и масштабирования трехмерного пространства ВГМ.

Воксельное перемещение плоскости $Ax+By+Cz+$ $+D=0$ в трехмерном пространстве будет определяться через повышенное пространство E^4 . Значения ЛГХ после смещения будут определяться как:

$$A_n' = A\sqrt{1-D_n^{2\prime}}, B_n' = B\sqrt{1-D_n^{2\prime}},$$

$$C_n' = C\sqrt{1-D_n^{2\prime}}, D_n' = \frac{L'}{sqrt1+L'^2}$$

где L' – кратчайшее расстояние от плоскости до начала координат после перемещения. L' выражается в зависимости от того, вдоль какой из осей выполняется смещение:$L' = L+\Delta x\times A$ или $L' = L+\Delta y\times$ $\times B$, или $L' = L+\Delta z\times C$. A, B, C – ЛГХ истинного пространства [4], выражаемые из ЛГХ A_n, B_n, C_n пространства повышенной размерности, которые, в свою очередь выражаются из численного значения цвета пикселя исходной ВГМ. На рисунке 2 представлена исходная форма функции квадрата. Результат смещения пространства ВГМ функции квадрата тремя возможными способами соответствует базовым графическим образам на рисунке 3. Воксельный поворот плоскости $Ax+By+Cz+$

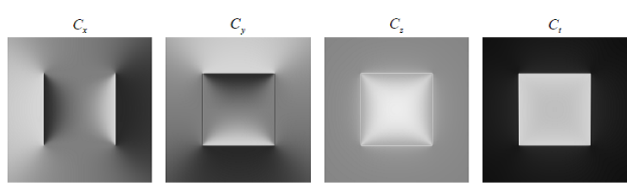

Рис. 3: Исходная форма функции квадрата

$+D=0$ в трехмерном пространстве будет выполняться последовательно вокруг осей координат (в плоскостях проекции). Следовательно, компоненты нормали $\overline{N_4'}$ после поворота, к примеру, вокруг оси OZ , будут вычисляться следующим образом:

$$A_n' = A\sqrt{1-D_n^{2\prime}}, B_n' = B\sqrt{1-D_n^{2\prime}},$$

$$C_n' = C_n', D_n' = D_n,$$

где $A' = A\cos\omega - B\sin\omega, B' = B\cos\omega - A\sin\omega$ определяются в зависимости от угла поворота ω^0 . На рисунке 4 представлена исходная форма функции квадрата. На рисунке 5 представлен результат поворота пространства ВГМ функции квадрата вокруг оси OZ .

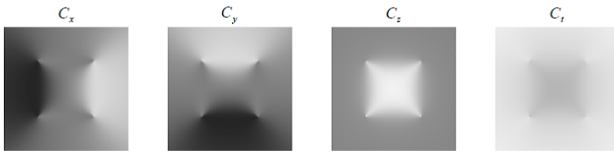

Рис. 4: Исходная форма функции квадрата

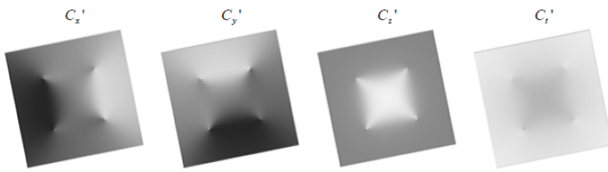

Рис. 5: Поворот функции квадрата вокруг оси OZ

Воксельное масштабирование положения плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ в трехмерном пространстве необходимо выполнить с учетом наличия угла наклона γ_n^0 , характеризующего отклонение плоскости от оси OZ и коэффициентов масштабированияM_x, M_y и M_z вдоль каждой оси пространства. Значения ЛГХ нормали $\overline{N_4'}$ будут находиться следующим образом:

$$A_n' = A\sqrt{1 - D_n^{2\prime}}, B_n' = B\sqrt{1 - D_n^{2\prime}},$$

$$C_n' = C\sqrt{1 - D_n^{2\prime}}, D_n' = \frac{L'}{sqrt1 + L'^2}$$

где $L' = \frac{M_x M_y M_z D_n}{\sqrt{M_y^2 M_z^2 A_n^2 + M_x^2 M_z^2 B_n^2 + M_x^2 M_y^2 C_n^2}}$
и $D_n' = \frac{L'}{\sqrt{1+L'^2}}$.

$A' = \frac{L' A_n}{M_x D_n}, B' = \frac{L' B_n}{M_y D_n}, C' = \frac{L' C_n}{M_z D_n}$ являются ЛГХ отмасштабированной нормали истинного пространства. На рисунке 6 представлена исходная форма функции смещённой относительно центра окружности. На рисунке 7 представлен результат масштабирования пространства ВГМ вдоль оси OY функции данной окружности.

Универсальность хранения информации в виде ВГМ позволяет обобщить разработанные алгоритмы до моделирования пространства размерности E^n . Единичный вектор нормали $\overline{N_{n+1}}$, определяющий положение объекта в пространстве, так же состоит из компонентов: $\overline{N_{n+1}} = \sum_1^n a_{in}x_i + b_n y = 1$.

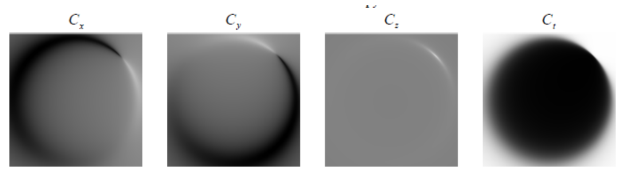

Рис. 6: Исходная форма функции смещенной относительно центра окружности

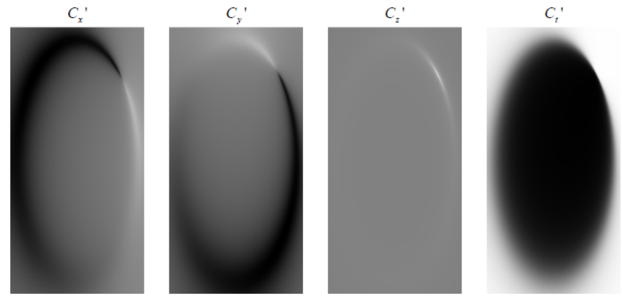

Рис. 7: Результат масштабирования пространства ВГМ вдоль оси OY функции смещенной окружности

При этом объект $\sum_1^n a_i x_i + b = 0$ может занять частное положение, когда ЛГХ нормали $\overline{N_{n+1}}$, отвечающая за удаленность от начала координат, станет равна нулю. При сдвиге многомерного пространства ВГМ локальные геометрические характеристики вектора $\overline{N_{n+1}}'$ будут определяться следующим образом: Коэффициенты $a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{rn}, b_n$ –

$$a_{1n}' = a_1\sqrt{(1 - b_n^2{}')}; \quad a_{2n}' = a_2\sqrt{(1 - b_n^2{}')}; \quad \ldots \quad a_{rn}' = a_n\sqrt{(1 - b_n^2{}')};$$

, при этом

$$a_1 = \frac{a_{1n}}{\sqrt{(1 - b_n^2)}}; \quad a_2 = \frac{a_{2n}}{\sqrt{(1 - b_n^2)}}; \quad \ldots \quad a_r = \frac{a_{rn}}{\sqrt{(1 - b_n^2)}}.$$

выражаются из базовых графических образов $\{C_{a1}, C_{a2}, \ldots, C_{ran}, C_b\}$. Компонента, определяющая кратчайшее расстояние от объекта до начала координат после смещения, находится как: $b_n' = \frac{L'}{\sqrt{1+L'^2}}$, при этом$L' = L + \Delta \times a_i$, где i – выбранная ось, вдоль которой происходит смещение. Вращение многомерного пространства ВГМ выглядит, как композиция последовательных поворотов вокруг соответствующих осей координат. С тем условием, что единовременному изменению подлежат только те ЛГХ нормали $\overline{N_{n+1}}$, которые проецируются на данную плоскость в натуральную величину. Воксельный поворот вокруг одной из осей в n - мерном пространстве на угол ω^0 будет соответствовать следующим выражениям: где $a_r =$

$$a_{1n}' = a_{1n};$$
$$\ldots$$
$$a_{rn}' = a_r' \sqrt{(1-b_n^2)};$$
$$a_{kn}' = a_k' \sqrt{(1-b_n^2)}; \text{ при этом } \begin{array}{l} a_r' = a_r \cos\omega - a_k \sin\omega \\ a_k' = a_k \cos\omega - a_r \sin\omega \end{array},$$
$$a_{in}' = a_{in};$$
$$\ldots$$
$$a_{nn}' = a_{nn};$$

$= \frac{a_{rn}}{\sqrt{1-b_n^2}}, a_k = \frac{a_{kn}}{\sqrt{1-b_n^2}}$
a_r' и a_k'(r и $k \in i$)– компоненты повернутой нормали $\overline{N_{n+1}}'$, проекция которых на плоскость вращения является натуральной величиной. При масштабировании многомерного пространства ВГМ компоненты многомерной единичной нормали определяются как:

$$a_{ni}' = a_i'\sqrt{1-b_n'^2}, \text{ где } a_i' = \frac{L'a_{ni}}{M_i b_n}$$

$$b_n' = \frac{L'}{\sqrt{1+L'^2}}$$

Значение величины удаленности от начала координат выражается следующим образом: a_{in} и b_n

$$L' = \frac{\prod_{k=1}^{n} M_k b_n}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}\frac{M_k^2}{M_m^2} a_{nm}}}.$$

выражаются из базовых М-образов с помощью обратной функции градации тона монохромной палитрыP .

Заключение:

Разработанные процедуры функционального, функционально-воксельного и воксельного сдвига, поворота и масштабирования пространства ВГМ на основе применения ЛГХ дополняют метод ФВМ и позволяют говорить об использовании графической информации, как об альтернативе существующим способам численных преобразований. Универсальность разработанных алгоритмов в преобразовании n -мерного пространства ВГМ указывает на эффективность применения средств ФВМ при работе со сложными функциями.

Литература

[1] А.В. Толок. Функционально-воксельный метод в компьютерном моделировании // ФИЗМАТЛИТ, 2016. С. 17-19.

[2] Е.А. Лоторевич. Принципы пространственной визуальной компоновки аналитических моделей, отображенных в воксельном графическом пространстве // Технология машиностроения. 2013. № 11. С.59-63

[3] Е.А. Лоторевич, А.В. Толок. Применение воксельных геометрических моделей для решения задач компоновки функции // В сборнике: Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM - 2015) // Труды международной конференции. 2015. С.47-51

[4] А.В. Толок, В.В. Мухин. Исследование функции одной переменной с помощью графических образов //Вестник Запорожского государственного университета. 1999. С.108-112