Конструирование дуг обвода из кривых одного отношения

И.Г. Балюба[1], Е.В. Конопацкий[2]
e.v.konopatskiy@donnasa.ru
[1]Донецк, Донецкая Народная Республика;
[2]ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры», Макеевка, Донецкая Народная Республика

В данной статье предлагается геометрический алгоритм и точечное описание дуги обвода, полученной на основе геометрической схемы конструирования кривых одного отношения. Приводится пример конструирование дуги обвода 1-го и 2-го порядка гладкости, после чего сделано обобщение способа конструирования плоской дуги обвода n*-го порядка гладкости.*

Ключевые слова: *дуга обвода, кривая одного отношения, БН-исчисление, порядок гладкости, кривая Безье.*

Constructing contour arcs from one relation curves

I.G. Baliuba[1], E.V. Konopatskiy[2]
e.v.konopatskiy@donnasa.ru
[1] Donetsk, Donetsk People's Republic;
[2]Donbas National Academy of Civil Engineering and Architecture, Makeyevka, Donetsk People's Republic

In this paper, we propose a geometric algorithm and a dot description of the arc contour obtained on the basis of a geometric scheme for constructing from the one relation curves. An example is given of constructing an arc contour of the smoothness by the first and second order, after which a generalization is made of the method for constructing a plane arc contour of the smoothness by n-th order.

Keywords: *arc contour, the one relation curve, BN-calculation, smoothness by order, Bezier curve.*

1. Введение

В инженерной практике часто встречаются задачи конструирования геометрических объектов незакономерной формы. Одним из основных способов решения такого класса задач является использование кусочных-гладких функций, к которым относятся различного рода обводы и сплайны. Здесь возникает отдельная задачи – стыковка этих дуг между собой с наперед заданным порядком гладкости. Аналитически порядок гладкости в точке стыковки дуг определяется порядком производной функции так, чтобы значения производных в конечной точке исходной дуги и начальной точки последующей дуги совпадали. При этом большое значение имеет как вид дуги обвода, так и геометрическая схема стыковки дуг обвода между собой. Например, стыковка обводов 1-го порядка гладкости геометрически достигается за счёт совпадения касательных в точке стыковки. Обеспечить такое условие достаточно просто. Сложнее обеспечить 2-й порядок гладкости, который подразумевает совпадение кривизны в точке стыковки. И т.д., чем выше порядок гладкости, тем сложнее геометрический алгоритм формирования обвода, а соответственно и его аналитическое описание. Однако задачу построения обвода необходимого порядка гладкости можно значительно упростить, если все необходимые свойства заложить на стадии конструирования дуги обвода.

2. Из истории возникновения кривых одного отношения

Кривые одного отношения имеют достаточно широкое распространение в инженерной практике. Они обладают легкоуправляемой гибкостью и при этом описываются системой линейных уравнений. Например, знаменитая дуга кривой Безье (как квадратная, так и кубическая) является не чем иным, как кривой одного отношения, и может быть аналитически описана системой линейных точечных уравнений [1, 2].

Термин «кривые одного отношения» был впервые введен профессором Балюбой И.Г. в его диссертационной работе на соискание ученой степени доктора технических наук [3], который использовал кривые одного отношения для конструирования выпуклых замкнутых и незамкнутых обводов 1-го порядка гладкости. Дальнейшее обобщение и развитие кривые одного отношения получили в работах учеников Балюбы И.Г. [4-5].

3. Дуга обвода 1-го порядка гладкости

Рассмотрим более подробно геометрическую схему конструирования дуги квадратичной кривой Безье (рис. 1).

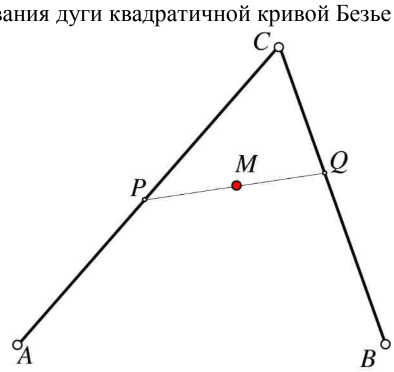

Рисунок 1: Геометрическая схема конструирования дуги квадратичной кривой Безье.

Дуга кривой Безье описывается текущей точкой M, движение которой определяется согласованным движением точек с помощью одинакового отношения $\frac{AP}{AC}=\frac{CQ}{CB}=\frac{PM}{PQ}=t$, и имеет касательные AC и BC соответственно в точках A и B. Точечное уравнение такой дуги кривой буде иметь следующий вид:

$$M_1=(A-C)\bar{t}^2+(B-C)t^2+C,$$

где A, B и C − исходные точки, определяющие симплекс двухмерного пространства;

t − текущий параметр, который изменяется от 0 до 1;

$\overline{t} = 1 - t$ − дополнение текущего параметра до 1.

Следует отметить замечательную особенность, которая заключается в том, что благодаря согласованному одинаковым параметром движению точек при значении параметра $t = 0$ текущие точки P и M совпадают с исходной точкой A, а при $t = 1$ текущие точки Q и M − с исходной точкой B. Выдвинем гипотезу, что именно это совпадение точек $A \equiv P \equiv M$ и $B \equiv Q \equiv M$ обеспечивает соответствующие касательные AC и BC, а следовательно и 1-й порядок гладкости в случае стыковки таких дуг. Проверим, подтвердится ли эта гипотеза для дуги обвода 2-го порядка гладкости.

4. Дуга обвода 2-го порядка гладкости

Модифицируем геометрическую схему конструирования дуги квадратичной кривой Безье (рис. 1), таким образом, чтобы в начальной и конечной точках дуги кривой выполнялись соответственно условия: $A \equiv P_1 \equiv P_2 \equiv M$ и $B \equiv Q_1 \equiv Q_2 \equiv M$. Для выполнения этого условия отношение соответствующих отрезков должно быть постоянным. Примем это отношение в качестве параметра: $\frac{AP_1}{AP_2} = \frac{P_1P_2}{P_1C} = \frac{CQ_1}{CQ_2} = \frac{Q_1Q_2}{Q_1B} = \frac{P_2M}{P_2Q_1} = t$ (рис. 2).

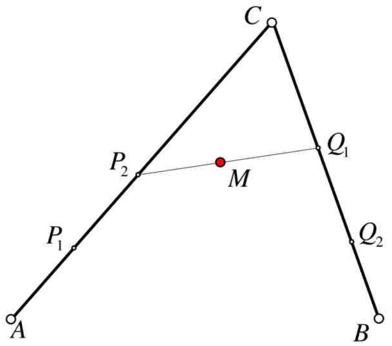

Рисунок 2: Геометрическая схема конструирования дуги кривой 2-го порядка гладкости.

Таким образом, получим систему линейных точечных уравнений, решая которую поочередно находим точки: P_1, P_2, Q_1, Q_2 и M.

$$P_1 = A\frac{\overline{t}}{1-\overline{t}t} + C\frac{t^2}{1-\overline{t}t}; \quad P_2 = A\frac{\overline{t}^2}{1-\overline{t}t} + C\frac{t}{1-\overline{t}t};$$

$$Q_1 = B\frac{t^2}{1-\overline{t}t} + C\frac{\overline{t}}{1-\overline{t}t}; \quad Q_2 = B\frac{t}{1-\overline{t}t} + C\frac{\overline{t}^2}{1-\overline{t}t};$$

$$M_2 = (A-C)\frac{\overline{t}^3}{1-\overline{t}t} + (B-C)\frac{t^3}{1-\overline{t}t} + C.$$

Перейдём от точечных уравнений, которые по своей сути являются символьной записью, к системе параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x_{M_2} = (x_A - x_C)\frac{\overline{t}^3}{1-\overline{t}t} + (x_B - x_C)\frac{t^3}{1-\overline{t}t} + x_C; \\ y_{M_2} = (y_A - y_C)\frac{\overline{t}^3}{1-\overline{t}t} + (y_B - y_C)\frac{t^3}{1-\overline{t}t} + y_C; \\ z_{M_2} = (z_A - z_C)\frac{\overline{t}^3}{1-\overline{t}t} + (z_B - z_C)\frac{t^3}{1-\overline{t}t} + z_C. \end{cases}$$

Проверим, обладает ли полученная дуга кривой заявленными ранее свойствами. Для этого вычислим кривизну полученной дуги кривой в начальной и конечной точках. В соответствии с [6], кривизна в декартовых координатах выражается следующей формулой:

$$k = \frac{\sqrt{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Воспользуемся программным пакетом *Maple* для расчёта кривизны в начальной и конечной точках. В результате, в обоих точках получаем одинаковое значение кривизны равное нулю. Причём это значение не зависит от координат точек симплекса ABC. Таким образом, полученная дуга обвода в начальной и конечной точках имеет точки спрямления, что может эффективно использоваться при моделировании обводов 2-го порядка гладкости инвариантных по отношению к геометрической схеме моделирования обвода. Т.е. при моделировании обвода появляется возможность использования уже известных ранее и хорошо изученных геометрических алгоритмов моделирования обвода 1-го порядка гладкости, модернизировав их предложенной дугой обвода.

5. Обобщение геометрической схемы конструирования дуг обвода n-го порядка гладкости

Предложенный геометрический алгоритм конструирования дуги обвода (рис. 1 и рис. 2) легко обобщить для построения дуг обвода высших порядков гладкости (более 2). Таким образом, были получены точечные уравнения дуг обвода 3-го, 4-го и 5-го порядка гладкости:

$$M_3 = (A-C)\frac{\overline{t}^4}{1-2\overline{t}t} + (B-C)\frac{t^4}{1-2\overline{t}t} + C,$$

$$M_4 = (A-C)\frac{\overline{t}^5}{1-3\overline{t}t+\overline{t}^2t^2} + (B-C)\frac{t^5}{1-3\overline{t}t+\overline{t}^2t^2} + C,$$

$$M_5 = (A-C)\frac{\overline{t}^6}{1-4\overline{t}t+3\overline{t}^2t^2} + (B-C)\frac{t^6}{1-4\overline{t}t+3\overline{t}^2t^2} + C.$$

В данном случае индекс при точке M соответствует порядку гладкости дуги кривой. Чтобы перейти от точечной формы представления уравнений к параметрической, достаточно выполнить покоординатный расчёт, аналогично дуге обвода 2-го порядка гладкости.

Воспользуемся программным пакетом Maple для визуализации полученных дуг обвода. На рисунке 3 различным цветом показана эволюция дуг обвода с повышением порядка гладкости.

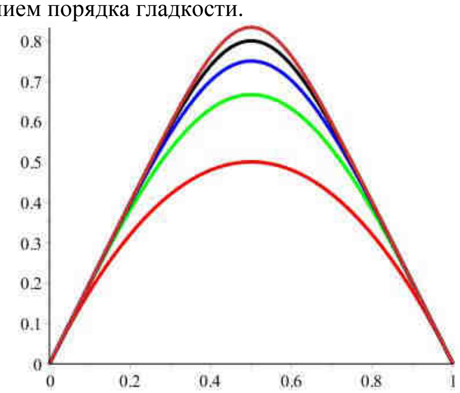

Рисунок 3: Визуализация дуг обвода различного порядка гладкости

Следует отметить, что при увеличении порядка гладкости наблюдается некоторое спрямление формы дуги обвода к начальной и конечной её точкам. Однако этот эффект был ожидаемым, поскольку это свойство заложено в геометрическую схему конструирования дуги обвода.

Как видно из полученных уравнений дуга обвода определяется только точками симплекса и текущим параметром t. Таким образом, для получения корректных результатов при построении выпуклого обвода необходимо наилучшим способом определить точку C, а точки A и B в любом случае обеспечат необходимые свойства стыковки дуг обвода.

6. Заключение

Представленный в работе способ конструирования дуг обвода, как кривых одного отношения, позволяет значительно упростить процесс стыковки дуг для моделирования кусочно-гладких кривых высоких порядков гладкости. К преимуществам предложенного способа конструирования дуг обвода можно отнести то, что необходимые свойства стыковки дуг между собой обеспечиваются геометрическим алгоритмом построения дуги и не зависят от геометрического алгоритма построения обвода.

7. Литература

[1] Балюба, И. Г. Геометрическая сущность кривых Безье и их аналитическое представление [Текст] / И. Г. Балюба // Сучасні проблеми геометричного моделювання: Зб. праць Міжнародної науково-практичної конференції. Ч. 1. – Харків: ХІПБ МВС України, 1998. – С. 178–182.

[2] Балюба, І. Г. Конструювання плоских і просторових алгебраїчних кривих системою лінійних точкових рівнянь [Текст] / І.Г. Балюба, Є. В. Конопацький, Ж. В. Старченко // Праці / Таврійська державна агротехнічна академія. – Мелітополь : ТДАТА, 2002. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 17. – С. 66–67

[3] Балюба, И. Г. Конструктивная геометрия многообразий в точечном исчислении [Текст]: дис. … доктора техн. наук : 05.01.01 / И. Г. Балюба. – Макеевка, 1995. – 227 с.

[4] Конопацький, Є. В. Геометричне моделювання алгебраїчних кривих та їх використання при конструюванні поверхонь у точковому численні Балюби-Найдиша [Текст]: дис. … канд. техн. наук: 05.01.01 / Є. В. Конопацький. – Мелітополь, 2012. – 164 с.

[5] Конопацький, Є. В. Криві третього порядку, як криві одного відношення [Текст] / Є.В. Конопацький, Ж.В. Старченко // Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет. – Мелітополь: ТДАТУ, 2011. – Вип. 4. Прикладна геометрія та інженерна графіка. Т. 51. – С. 111–115.

[6] Норден А.П. Краткий курс дифференциальной геометрии [Текст] / Норден А.П. // М.: ФИЗМАТГИЗ, 1958. – 244 с.

Об авторах

Балюба Иван Григорьевич, д.т.н., профессор, академик АНВО Украины, отличник образования Украины.

Конопацкий Евгений Викторович, к.т.н., доцент кафедры «Специализированные информационные технологии и системы» ГОУ ВПО «Донбасская национальная академия строительства и архитектуры». Его e-mail e.v.konopatskiy@donnasa.ru.