

Обобщенный конструктивный алгоритм преобразования инверсии относительно окружности

Д.В. Волошинов, Е.С. Казначеева, Е.С. Хайбаракханова
denis.voloshinov@yandex.ru

Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций, Санкт-Петербург, Россия

Статья посвящена разработке унифицированного конструктивного геометрического алгоритма преобразования инверсии, позволяющего на единой методологической основе осуществлять преобразование как действительных, так и мнимых точек плоскости относительно действительных и мнимых окружностей.

Ключевые слова: инверсия, конструктивная геометрия, геометрическое моделирование, Симплекс.

A generic constructive algorithm for inversion with respect to the circumference

D.V. Voloshinov, E.S. Kaznacheeva, E.S. Khaybarakhmanova
denis.voloshinov@yandex.ru

Saint-Petersburg state University of Telecommunications, Saint-Petersburg, Russia

The article is devoted to the development of a unified design geometric transformation algorithm of the inversion, allowing for a unified methodological basis to carry out the conversion of both real and imaginary points of the plane relative to the real and imaginary circles.

Keywords: inversion, constructive geometry, geometric modeling, Simplex.

1. Введение

Инверсия относится к достаточно хорошо изученным геометрическим преобразованиям [1]. Она находит применение при решении многих геометрических задач, в частности, задач на сопряжение прямых и окружностей. Инверсия является одним из центральных «геометрических стержней», связывающих через проективные преобразования объекты, на которых строится решение задачи Аполлония. Однако в силу ограниченности возможностей традиционных геометрических инструментов [2-6], область применения преобразования инверсии ограничивается лишь задачами, относящимися к действительным (вещественным) объектам плоскости. Однако с чисто математической точки зрения преобразование инверсии может быть легко перенесено и на мнимые образы плоскости, причем и сама окружность, относительно которой осуществляется преобразование инверсии, также может быть мнимой, в том числе иметь мнимые центр и радиус. Возможность реализации компьютерными средствами специализированных геометрических инструментов позволяет поставить вопрос о разработке единого конструктивного геометрического алгоритма, одинаково пригодного для реализации преобразования как в действительных, так и в мнимых образах проективной плоскости.

2. Общий алгоритм инверсии

Инверсией I точки A относительно окружности d называется преобразование, переводящее некоторую точку плоскости A , называемую прообразом, в точку-образ A' таким образом, что A и A' находятся на одной прямой линии с центром C окружности f , а произведение расстояний от центра C до точек A и A' равняется квадрату радиуса R_f окружности f : $|CA||CA'| = R_f^2$. Для построения образа точки A при

помощи чертежных инструментов используется следующий алгоритм:

Укажем точку A внутри круга, ограниченного окружностью f (рис. 1);

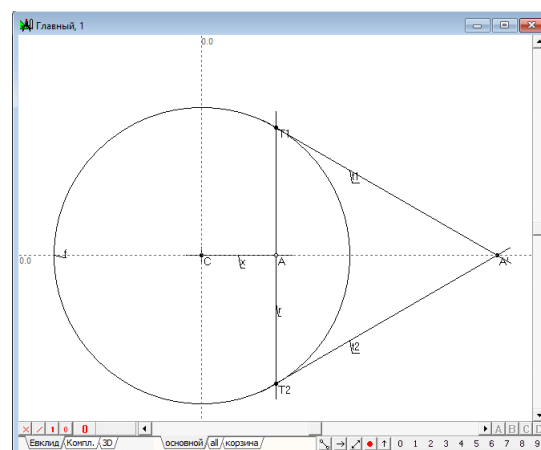


Рис. 1. Первая часть конструктивного алгоритма преобразования точки в инверсии.

1. Найдем центр окружности f – точку C ;
2. Соединим точку C с точкой A прямой линией x ;
3. Проведем через точку A прямую линию r , перпендикулярную x ;
4. Найдем точки T_1 и T_2 пересечения прямой r с окружностью f : $T_1, T_2 = r \times f$.
5. Проведем через точки T_1 и T_2 прямые t_1 и t_2 , касательные к окружности f ;
6. Найдем точку A' в пересечении прямых t_1 и t_2 : $A' = t_1 \times t_2$. Понятно, что полученная точка A' инцидентна с прямой x .

Пусть теперь точка A находится вне круга, ограниченного окружностью f (рис. 2). Выполним следующий алгоритм, устанавливающий связь между точками A и A' :

1. Найдем центр окружности f – точку C .
2. Соединим точку C с точкой A прямой линией x .
3. Опустим из точки A касательные прямые t_1 и t_2 на окружность f .
4. Обозначим точки касания прямых t_1 и t_2 с окружностью f через T_1 и T_2 .
5. Проведем через точки T_1 и T_2 прямую линию r .
6. Найдем точку A' пересечения прямых x и r : $A' = x \times r$.

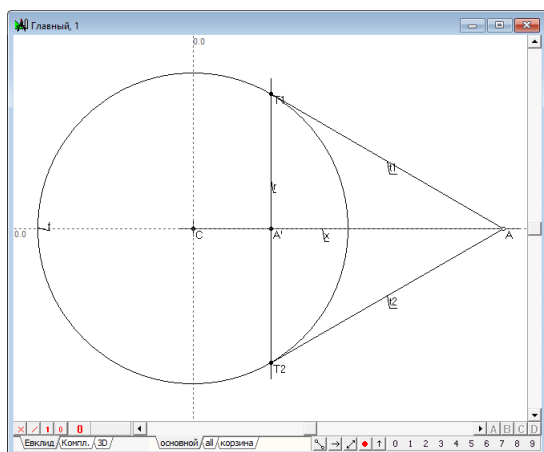


Рис. 2. Вторая часть конструктивного алгоритма преобразования точки в инверсии.

Из построений видно, что алгоритм несимметричен и его исполнение зависит от того, какое геометрическое место по отношению к окружности f занимает точка A .

Покажем теперь, что преобразование инверсии обладает следующим, отмеченным ранее, свойством: произведение расстояний от центра окружности инверсии до точек A и A' равно квадрату радиуса R_f окружности f (рис. 3).

Введем следующие обозначения: радиус окружности f равен R_f , расстояние от точки C до точки A есть r_1 , расстояние от точки C до точки A' есть r_2 . Обозначим расстояние между точками T_1 и A через $c = |T_1 A|$, расстояние между точками A и A' через $a = |AA'|$, расстояние между точками T_1 и A' через $b = |T_1 A'|$. Запишем равенства, следующие из чертежа: $r_1 + a = r_2$, $r_1^2 + c^2 = R_f^2$, $b^2 = c^2 + a^2$, $R_f^2 + b^2 = (r_1 + a)^2$. Вычтем из второго равенства третье. Получим: $r_1^2 - a^2 = R_f^2 - b^2$. Сложим полученный результат с четвертым равенством. В результате имеем:

$$2R_f^2 = r_1^2 + 2r_1 a + a^2 + r_1^2 - a^2 = 2r_1(r_1 + a). \text{ Поскольку } r_1 + a = r_2, \text{ то } 2R_f^2 = 2r_1 \cdot r_2, \text{ что и требовалось показать.}$$

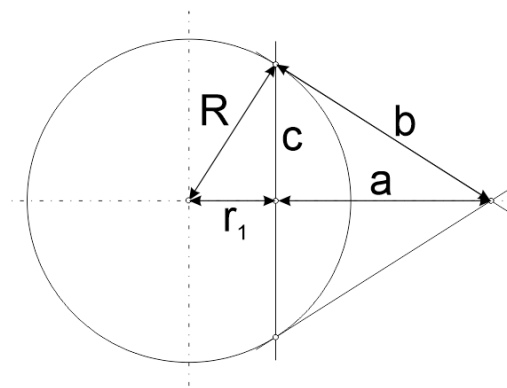


Рис. 3. К доказательству основного свойства инверсии.

В работах [2-5] показано, каким образом можно реализовать компьютеризированные геометрические инструменты, реализующие построения точек пересечения прямых линий и окружностей во всевозможных сочетаниях. Там же показано, что рассмотренные геометрические операции обладают общностью, заключающейся в том, что эти операции можно применять как к действительным, так и мнимым прямым и окружностям плоскости. В связи с этим возникает задача о распространении полученных в [2-5] результатов на преобразование инверсии, в которой можно было бы переводить как действительные, так и мнимые точки плоскости по отношению к окружностям, также имеющим действительную или мнимую геометрическую природу. Для решения этой задачи следует разработать конструктивный геометрический алгоритм преобразования инверсии, построенный исключительно на операциях пересечения прямых линий и окружностей (во всевозможных комбинациях), причем желательно, чтобы этот алгоритм был инвариантен по отношению к положению точки A в отношении окружности инверсии f .

Рассмотрим следующую геометрическую схему (рис. 4):

Пусть на плоскости задана некоторая окружность f . Укажем также точку A произвольно (но не совпадающую с центром окружности f). Выполним преобразование точки A в точку A' в инверсии I_f с использованием следующего алгоритма:

Найдем центр окружности f – точку C .

Соединим точку C с точкой A прямой линией x .

Построим окружность v с центром в точке A , проходящую через центр C окружности инверсии f .

Найдем точки P и Q пересечения окружности v с окружностью инверсии f .

Проведем через точки P и Q прямую линию $m = PQ$. Прямая m является радикальной осью окружностей f и v .

Найдем точку пересечения U прямых линий m и x : $U = m \times x$.

Проведем окружность w с центром в точке U и проходящую через центр C окружности инверсии f .

Точка A' находится, как одна из точек пересечения окружности w с прямой x , не совпадающая с точкой C .

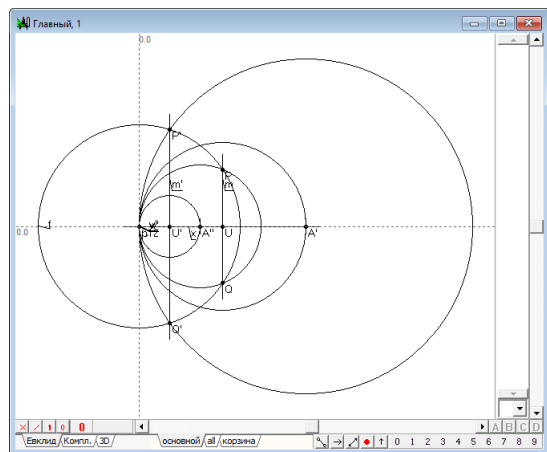


Рис. 4. Общий алгоритм инверсии.

Аналогичным образом алгоритм работает и в «обратном» направлении. Выберем теперь в качестве исходной точки точку A' и преобразуем ее в инверсии I_f в точку A'' относительно той же окружности f . Естественно предположить, что совпадение точек A и A'' будет обеспечено.

Проведем с центром в точке A' окружность v' , проходящую через центр C окружности инверсии f .

Найдем точки P' и Q' пересечения окружностей v' и f : $P', Q' = f \times v'$.

Соединим точки P' и Q' прямой $m' = P'Q'$.

Найдем точку U' пересечения прямых m' и x : $U' = m' \times x$.

Проведем с центром в точке U' окружность w' , проходящую через центр C окружности инверсии f .

Найдем две точки пересечения окружности w' с прямой x . Та из них, которая не совпадает с точкой C и является искомой точкой A'' – образом точки A' в преобразовании инверсии I_f относительно окружности f .

Докажем теперь, что данное геометрическое построение полностью соответствует преобразованию инверсии.

Обозначим расстояние от точки C до точки A через $r_1 = |CA|$, а расстояние от точки C до точки A' через $r_2 = |CA'|$. Пусть радиус окружности f равен R . Требуется доказать, что $r_1 \cdot r_2 = R^2$.

Обозначим расстояние между точками A и U через $a = |AU|$, а расстояние между точками P и U через $c = |PU|$. Тогда можно записать следующие равенства:

$$2(r_1 + a) = r_2, \quad a^2 + c^2 = r_1^2 \quad \text{и} \quad R^2 = (r_1 + a)^2 + c^2.$$

Поскольку $c^2 = r_1^2 - a^2$, то

$$R^2 = (r_1 + a)^2 + r_1^2 - a^2 = 2r_1(r_1 + a) = 2r_1 \frac{r_2}{2} = r_1 \cdot r_2, \quad \text{что и требовалось доказать.}$$

Мы видим, что $A' = I_f(A)$ и $A'' = I_f(A')$.

Преобразование инверсии инволюционно, то есть $I_f = I_f^{-1}$, поскольку оно переводит прообраз в образ и наоборот.

3. Сопряжения на мнимых образах

Рассмотрим типовую задачу на построение окружности, проходящей через заданную точку, касательную к двум заданным окружностям.

Пусть имеются две окружности a и b , а также точка p , через которую требуется провести окружности u и v , касательные к a и b (рис. 5). Пусть также известно, что a и b пересекаются явным образом, то есть образуют в пересечении действительные точки P и Q . Построим, например, окружность d_1 с центром в точке P . Преобразовав в инверсии относительно d_1 окружности a и b в прямые линии l и m , а точку p в точку p_2 , построим сопряжение l и m с точкой p_2 окружностями d_2 и d_3 . Такое сопряжение инструментально выполняется проще, чем исходное.

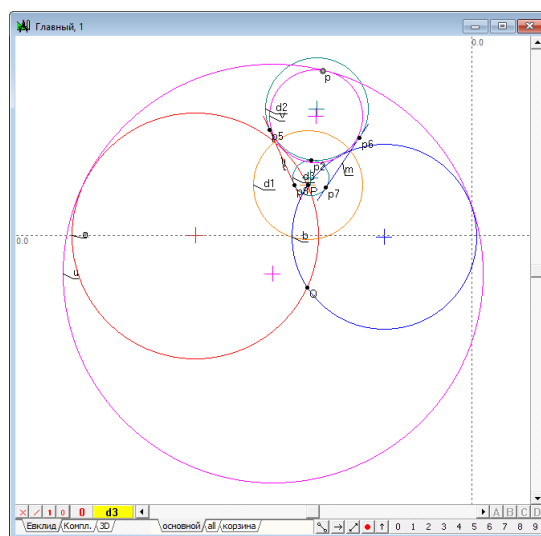


Рис. 5. Построение окружностей, касательных к двум заданным, проходящих через точку.

Остается полученные окружности d_2 и d_3 преобразовать в инверсии еще раз (поскольку инверсия инволюционна), чтобы получить окончательное решение – искомые окружности u и v .

Нетрудно заметить, однако, что данное построение выполнимо лишь в том случае, если окружности a и b пересекаются в действительных точках P и Q . Если же окружности a и b располагаются таким образом, что точки P и Q получают мнимые значения, то это будет означать, что центр окружности инверсии d_1 – точка P будет мнимым при, вообще говоря, вещественном радиусе. Заметим также, что невыполнимость обычными средствами операции инверсии не означает, что построение сопряжения окружностей a и b при заданных условиях невозможно (рис. 6).

Это, в свою очередь, означает, что «потерянная» конструктивная взаимосвязь объектов кроется в мнимости объектов, ее составляющих.

Исследование картины преобразования инверсии при решении задачи сопряжения с использованием мнимой окружности выполнено в среде системы конструктивного геометрического моделирования Симплекс [6], функциональный состав которой расширен действиями над мнимыми образами.

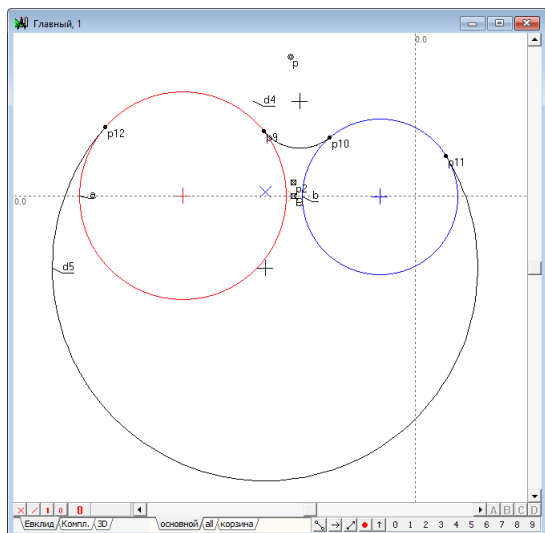


Рис. 6. Иллюстрация существования решения задачи на построение сопряжения при «вырождении» объектов операции инверсии.

На рис. 7, 8. Можно наблюдать картину сопряжения мнимых образов и их взаимосвязь с действительным решением при выполнении обобщенного алгоритма инверсии, рассмотренного ранее в данной статье.

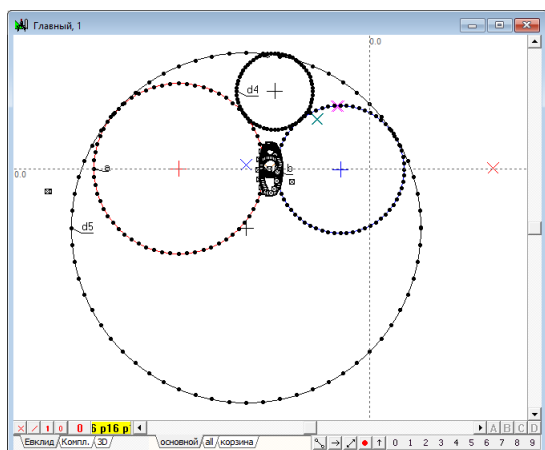


Рис. 7. Картина преобразования, иллюстрирующая образование мнимых точек на образах при отображении их действительных частей.

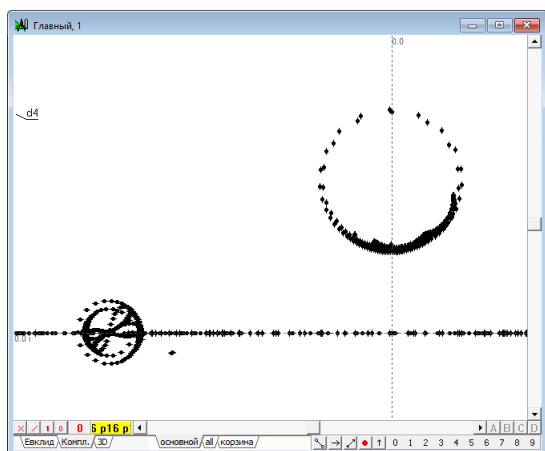


Рис. 8. Картина преобразования, иллюстрирующая образование мнимых точек на образах при отображении мнимыми точечными парами.

4. Заключение

Таким образом, в статье показана возможность реализации компьютеризированных геометрических инструментов, расширяющих возможности решения геометрических задач, не получавших ранее инструментальной поддержки из-за ограниченности возможностей средств предметного воплощения геометрических алгоритмов. Показана общность алгоритма преобразования точки в инверсии относительно окружности на множестве мнимых образов и возможность его применения для решения задач и синтеза геометрических форм.

5. Литература

- [1] Бакельман И.Я. Инверсия. М.: Наука. 1966, 79 с.
- [2] Волошинов Д.В. Геометрическая лаборатория. Закладываем основы // Качество графической подготовки: проблемы, традиции и инновации: Материалы VII международной Интернет-конференции. Февраль - март 2017 г. Пермь, 2017.
- [3] Волошинов Д.В. Геометрическая лаборатория. Инструменты ортогональности // Качество графической подготовки: проблемы, традиции и инновации: Материалы VII международной Интернет-конференции. Февраль - март 2017 г. Пермь, 2017.
- [4] Волошинов Д.В. Геометрическая лаборатория. Новый геометрический инструмент // Качество графической подготовки: проблемы, традиции и инновации: Материалы VII международной Интернет-конференции. Февраль - март 2017 г. Пермь, 2017.
- [5] Волошинов Д.В. Казначеева Е.С., Хайбарахманова Е.С. Автоматизация проектирования поверхностей на основе конструктивных геометрических моделей // Качество графической подготовки: проблемы, традиции и инновации: Материалы VII международной Интернет-конференции. Февраль - март 2017 г. Пермь, 2017.
- [6] Волошинов Д.В. Конструктивное геометрическое моделирование. Теория, практика, автоматизация: монография / Д.В.Волошинов. – Saarbrücken: Lambert Academic Publishing, 2010. – 355 с.

Об авторах

Волошинов Денис Вячеславович, д.т.н., заведующий кафедрой информатики и компьютерного дизайна Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. М.А.Бонч-Бруевича. E-mail: denis.voloshinov@yandex.ru.

Казначеева Екатерина Сергеевна, магистрант кафедры информатики и компьютерного дизайна Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. М.А.Бонч-Бруевича.

Хайбарахманова Екатерина Сергеевна, магистрант кафедры информатики и компьютерного дизайна Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. М.А.Бонч-Бруевича.