Визуальная компьютерная реконструкция квадратичных соответствий

В.А. Короткий
ospolina@mail.ru
Южно-Уральский государственный университет, кафедра инженерной и компьютерной графики
Челябинск, Россия

Рассматриваются две задачи реконструкции квадратичных соответствий, сформулированные еще в 19 веке, но так и не решенные до настоящего времени. Первая задача заключается в построении фундаментальных точек квадратичного преобразования плоскости, заданного семью парами соответственных точек. Вторая задача связана с поиском графического алгоритма реконструкции квадрики, заданной девятью точками. Интерес к этим задачам в настоящее время полностью утрачен, хотя именно сейчас, благодаря графическим средствам компьютерной визуализации, появилась возможность их точного конструктивного решения. Обе задачи, рассмотренные в статье, объединены как общим методом решения, так и общим инструментом, необходимым для конструктивной реализации метода. Для решения поставленных задач использован метод понижения размерности массива исходных данных. При поиске фундаментальных точек квадратичного преобразования, заданного 7 парами сопряженных точек, предлагается временно исключить из рассмотрения какую-либо пару данных сопряженных точек. При реконструкции квадрики, заданной 9 точками, также временно исключается из рассмотрения одна из данных точек, что позволяет построить пучок квадрик, инцидентных восьми оставшимся точкам. Для выделения из этого пучка искомой квадрики используется метод сечений. Для конструктивного решения обеих задач используется специальная компьютерная программа, вычерчивающая кривые второго порядка, без использования которой конструктивная реализация предложенных алгоритмов невозможна.

Ключевые слова: *квадратичное бирациональное соответствие, преобразование Гирста, проективное преобразование, пучок конических сечений, пучок квадрик.*

Visual computer reconstruction of quadratic mappings

V.A. Korotkij
ospolina@mail.ru
South Ural state University, Department of engineering and computer graphics
Chelyabinsk, Russia

We consider two tasks of reconstruction of quadratic correspondences, formulated in the 19th century, but has not been solved to date. The first task is to build fundamental points of a quadratic transformation of the plane defined by seven pairs of corresponding points. The second problem is connected with the search graphical algorithm of reconstruction of a quadric defined by the nine dots. Interest in these problems at present is completely lost, even though now, thanks to the graphical tools of computer visualization, there is a possibility of their accurate design solutions. Both tasks, considered in article, is united both by common solutions and common tool needed for the constructive implementation of the method. For the decision of tasks used the method of decreasing the size of the array the source data. When you search the fundamental points of a quadratic transformation given 7 pairs of conjugate points, is proposed to temporarily exclude from consideration any pair of conjugate points of data. During the reconstruction of quadric given 9 points, also temporarily eliminated from consideration one of the data points that allows you to build a bundle of quadrics incident eight remaining points. To highlight this beam the desired quadric method is used, sections. A constructive solution of both problems we use a special computer program for drawing conic curves, without the use of which a constructive implementation of the proposed algorithms is impossible.

Keywords: *quadratic birational compliance, conversion Hirst, projective transformation, a beam of tapered cross-section, a bundle of quadrics.*

1. Введение

Развитие средств компьютерной графики приводит не только к появлению принципиально новых методов геометрического моделирования, но и предоставляет возможность конструктивного решения классических задач теоретической и прикладной геометрии.

В статье рассматриваются две задачи, оставшиеся нам в наследство от великих геометров девятнадцатого века. Парадоксальным образом, интерес к этим задачам в настоящее время полностью утрачен. Парадокс состоит в том, что именно сейчас, благодаря средствам компьютерной визуализации, появилась возможность их точного конструктивного решения.

Первая из рассматриваемых задач заключается в построении фундаментальных точек квадратичного кремонова преобразования (*F*-точек), заданного семью парами сопряженных точек. Как известно (Cremona), сопряженностью семи пар точек устанавливается соответствие любой точки плоскости П определенной точке другой плоскости П′, а следовательно – точек какого-либо прямолинейного ряда поля П с точками некоторого конического сечения (гомалоида) поля П′. Задача реконструкции (построения *F*-точек) может быть решена только на основе точной компьютерной визуализации. Более простая задача построения восьмой пары сопряженных точек рассматривалась К.А. Андреевым [1].

Вторая задача связана с поисками аналогии между свойствами поверхностей второго порядка и знаменитой теоремой Паскаля (М. Шаль). Безуспешные поиски такой аналогии приводят к задаче визуальной графической реконструкции поверхности второго порядка (ПВП) по девяти ее точкам.

Очевидно, задачи, связанные с исследованием квадратичных соответствий, могут быть конструктивно решены лишь при выполнении одного обязательного условия. Это условие состоит в том, что кривые второго порядка (КВП) должны быть такими же простыми и точно вычерчиваемыми линиями, как прямая и окружность.

Выполнение этого условия обеспечивается с помощью программного средства “Универсальный компьютерный коникограф” [2].

2. Визуализация F-точек

Квадратичное бирациональное соответствие Ω плоских точечных полей П, П′ однозначно определено семью парами соответственных точек $A{\sim}A'$, $B{\sim}B'$, $C{\sim}C'$, $D{\sim}D'$, $E{\sim}E'$, $R{\sim}R'$, $T{\sim}T'$. Требуется найти F-точки соответствия Ω.

Выполним проективное преобразование Λ плоскости П, переводящее четырехугольник $ABCD$ в четырехугольник, конгруэнтный четырехугольнику $A'B'C'D'$ поля П′. Совмещая поля П, П′ до совпадения конгруэнтных фигур $ABCD$ и $A'B'C'D'$, получаем задачу – на совмещенной плоскости П=П′ найти F-точки преобразования Ω, заданного семью парами сопряженных точек, из которых четыре пары точек совпадают.

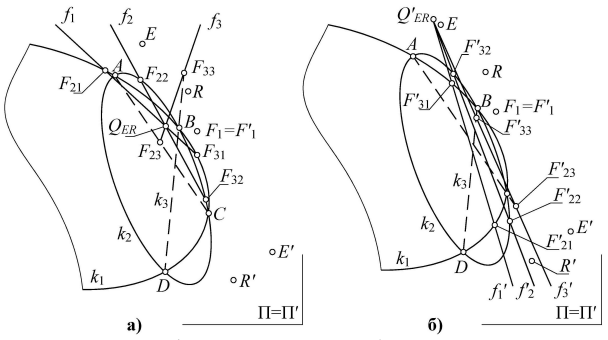

Рис. 1. Пучки хорд преобразования ω_{ER}

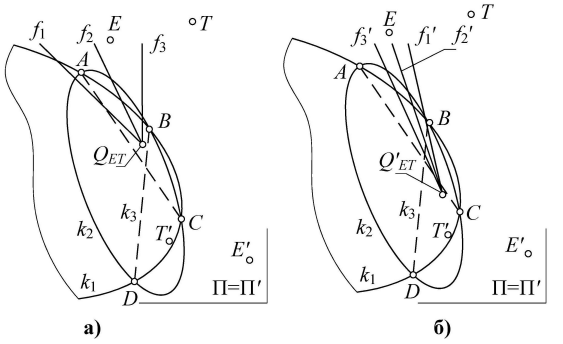

Рис. 2. Пучки хорд преобразования ω_{ET}

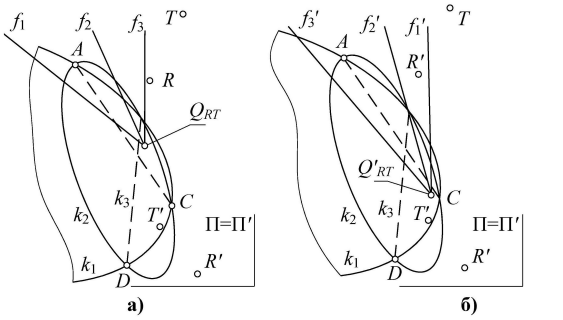

Рис. 3. Пучки хорд преобразования ω_{RT}

Действие 1. Исключаем из рассмотрения какую-либо пару не совпадающих сопряженных точек, например, $T{\sim}T'$. Рассмотрим однопараметрическое семейство квадратичных преобразований ω_{ER}, заданное четырьмя парами совпадающих сопряженных точек $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$, $D=D'$ и двумя парами не совпадающих сопряженных точек $E{\sim}E'$, $R{\sim}R'$. Выделяя три произвольных конических сечения k_1, k_2, $k_3=AC\cap BD$ пучка $\psi(ABCD)$, получаем три центральных квадратичных преобразования $(\omega_{ER})_1$, $(\omega_{ER})_2$, $(\omega_{ER})_3$ с общим центром $F_1=F_1'$ и инвариантными кониками k_1, k_2, k_3 (рис. 1). На каждой конике находим две пары ассоциированных точек $F_2{\sim}F_2'$, $F_3{\sim}F_3'$, из которых все сопряженные точки (за исключением точек $T{\sim}T'$) проецируются двумя парами проективных пучков. Каждой конике k_i ставится в соответствие хорда $f_i=F_{2i}\text{-}F_{3i}$ поля П и хорда $f_i'=F_{2i}'\text{-}F_{3i}'$ поля П′. Хорды f_i образуют пучок с вершиной Q_{ER} (рис. 1, а). Хорды f_i' образуют пучок с вершиной Q'_{ER} (рис. 1, б).

Лемма 1. Хорды f_i и f_i' образуют пучки прямых, проективные пучку конических сечений $\psi(ABCD)$. Доказательство леммы основано на свойствах проективных соответствий в образах второго порядка.

Действие 2. Повторяем действие 1, исключая из рассмотрения другую пару не совпадающих сопряженных точек $R{\sim}R'$. Получаем семейство квадратичных преобразований ω_{ET}, заданное шестью парами точек $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$, $D=D'$, $E{\sim}E'$, $T{\sim}T'$. Выделяя из ψ те же самые коники k_1, k_2, $k_3=AC\cap BD$, находим на каждой из них две пары ассоциированных точек $F_2{\sim}F_2'$, $F_3{\sim}F_3'$, из которых все сопряженные точки (кроме $R{\sim}R'$) проецируются двумя парами соответственных пучков. Каждой конике k_i (i=1,2,3) ставятся в соответствие хорды $f_i=F_{2i}\text{-}F_{3i}$ и $f_i'=F_{2i}'\text{-}F_{3i}'$ (рис. 2). Согласно лемме 1, получаем пучки хорд $Q_{ET}(f_1, f_2, f_3,...)$ и $Q'_{ET}(f_1', f_2', f_3',...)$, проективные пучку коник ψ.

Действие 3. Повторяем действие 2, исключая из рассмотрения пару сопряженных точек $E{\sim}E'$. Рассматриваем семейство квадратичных преобразований ω_{RT}, заданное шестью парами точек $A=A'$, $B=B'$, $C=C'$, $D=D'$, $R{\sim}R'$, $T{\sim}T'$. В каждом из преобразований $(\omega_{RT})_i$ инвариантной конике k_i ставятся в соответствие хорды $f_i=F_{2i}\text{-}F_{3i}$ и $f_i'=F_{2i}'\text{-}F_{3i}'$. Получаем пучки хорд $Q_{RT}(f_1, f_2, f_3,...)$ и $Q'_{RT}(f_1', f_2', f_3',...)$, проективные пучку коник ψ (рис. 3).

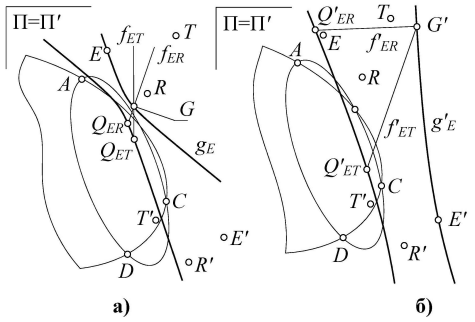

Рис. 4. Вспомогательные коники g_E и g_E'

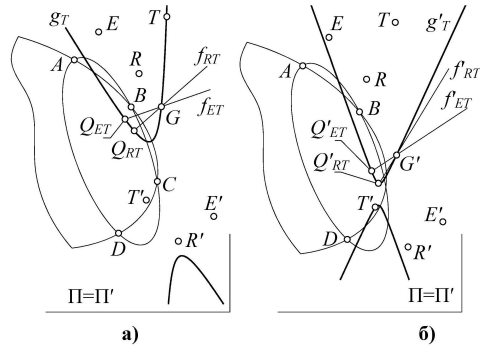

Рис. 5. Вспомогательные коники g_T и g'_T

Действие 4. Совместно рассмотрим преобразования ω_{ER} и ω_{ET}. Согласно лемме 1, пучки хорд, порожденные этой парой преобразований, проективны пучку коник ψ, следовательно, проективны между собой. Поэтому точки G пересечения проективно соответственных хорд f_{ER} и f_{ET} определяют конику g_E, проходящую через E и через вершины Q_{ER}, Q_{ET} (рис. 4, а). Аналогичным образом, точки $G'=f_{ER}'\cap f_{ET}'$ определяют конику g_E', проходящую через E' и через вершины Q_{ER}', Q_{ET}' (рис. 4, б).

Действие 5. Рассматривая совместно другую пару преобразований ω_{RT} и ω_{ET}, получаем проективные пучки хорд (Q_{RT}) и (Q_{ET}). Точки пересечения проективно соответственных прямых этих пучков определяют коническое сечение g_T, проходящее через T и через вершины Q_{RT}, Q_{ET} (рис. 5, а). Точки пересечения соответственных прямых в проективных пучках (Q_{RT}'), (Q_{ET}') определяют конику g_T', проходящую через T' и через вершины Q_{RT}', Q_{ET}' (рис. 5, б).

Лемма 2. В преобразовании Ω фундаментальные точки F_1, F_2, F_3 поля П совпадают с точками пересечения вспомогательных конических сечений g_E и g_T, а точки F_1', F_2', F_3' поля П совпадают с точками пересечения коник g_E' и g_T'.

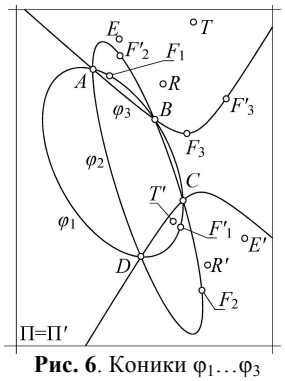

Рис. 6. Коники $\varphi_1 \ldots \varphi_3$

Доказательство леммы 2 следует из того, что соответственные прямые в пучках F_i, F_i' определяют конику φ_i, инцидентную базисным точкам пучка ψ (рис. 6).

Из леммы 2 следует, что для визуализации F-точек преобразования Ω на совмещенной плоскости П=П′ достаточно отметить точки пересечения конических сечений $g_E \cap g_T$ и $g_E' \cap g_T'$ (рис. 7). Чтобы возвратить найденные F-точки в исходное поле П, следует выполнить обратное проективное преобразование Λ^{-1}.

Исследование. Вспомогательные коники g_E, g_T пересекаются в четырех точках (см. рис. 7, а). Чтобы выделить из них искомые точки F_1, F_2, F_3, заметим, что эти коники проходят через вершину пучка (Q_{ET}). Следовательно, точка Q_{ET} – одна из четырех точек пересечения коник g_E, g_T. Оставшиеся три точки указывают искомые F-точки преобразования Ω. Вспомогательные КВП g_E', g_T' также пересекаются в четырех точках, одна из которых совпадает с Q_{ET}'. Оставшиеся три точки указывают F'-точки преобразования Ω (см. рис. 7, б).

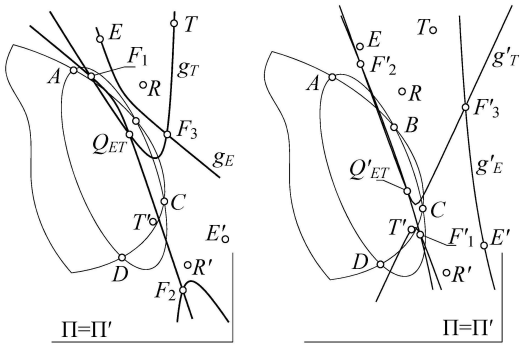

Рис. 7. Визуализация F-точек преобразования Ω

Заметим, что ассоциированные пары F-точек располагаются на одной и той же конике пучка ψ (см. рис. 6). Поэтому для выделения точки F_1', ассоциированной с F_1, следует начертить коническое сечение φ_1, проходящее через F_1 и через базис пучка ψ. Коника φ_1 пройдет через искомую точку F_1'. Точно так же определяются две другие пары ассоциированных F-точек.

Две точки пересечения вспомогательных КВП могут быть мнимыми. В этом случае получаем квадратичное преобразование Ω с двумя парами мнимых сопряженных F-точек, которое может быть приведено к преобразованию Гирста с центром внутри инвариантной коники. В свою очередь, преобразование Гирста с внутренней центральной точкой может быть сведено к инверсии относительно окружности.

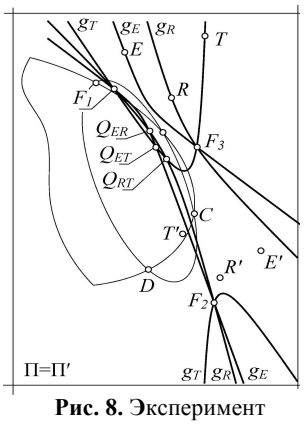

Рис. 8. Эксперимент

Эксперимент. Для проверки решения найдем вспомогательную конику g_R, образованную проективными пучками (Q_{RT}) и (Q_{ER}) в преобразованиях ω_{RT} и ω_{ER}. Коника g_R проходит через R, через Q_{RT}, Q_{ER} и через ранее найденные F-точки преобразования Ω, что подтверждает достоверность разработанного алгоритма (рис. 8).

3. Реконструкция ПВП по 9 точкам

Девять произвольно указанных в пространстве точек A_j, B_j, C_j (j=1,2,3), не инцидентных по три одной прямой и не инцидентных по четыре одной плоскости, определяют единственную квадрику φ. Требуется составить алгоритм построения любого количества точек, инцидентных φ.

Схема решения

1. Выделяем три плоскости α(A_1, A_2, A_3), β(B_1, B_2, B_3), γ(C_1, C_2, C_3) и отмечаем линию m пересечения любой пары плоскостей, например, m=α∩β.

2. Как и в предыдущей задаче, одну из заданных точек (например, точку C_3) временно исключаем из рассмотрения.

3. Фиксируем на m произвольную точку M. Точка N_i, бегущая по m, индуцирует пучок квадрик Φ(φ_i). Произвольная квадрика φ_i пучка Φ определена точкой C_1 и пересекающимися в точках M, N_i коническими сечениями a_i(A_1, A_2, A_3, M, N_i), b_i(B_1, B_2, B_3, M, N_i) (рис. 9).

4. В сечении пучка квадрик Φ(φ_i) плоскостью γ получаем пучок конических сечений γ(g_i). Находим в пучке

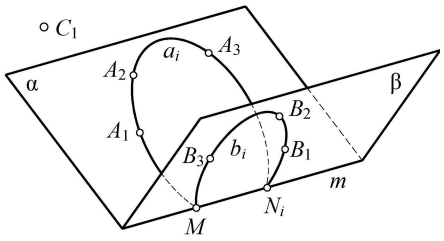

Рис. 9. Квадрика φ_i(a_i, b_i, C_1)

γ(g_i) коническое сечение g_{C2}, проходящее через точку C_2. В пучке Φ(φ_i) этому коническому сечению отвечает квадрика φ_{C2}. Квадрика φ_{C2} проходит через все заданные точки A_j, B_j, C_j, кроме временно исключенной из рассмотрения точки C_3.

5. Отметим на m какую-либо точку M', не совпадающую с M. Точка N_k, бегущая по m, индуцирует пучок квадрик Φ′(φ_k). Любая квадрика φ_k пучка Φ′ определена точкой C_1 и пересекающимися в точках M', N_k коническими сечениями a_k(A_1, A_2, A_3, M', N_k), b_k(B_1, B_2, B_3, M', N_k).

6. В сечении пучка квадрик Φ′(φ_k) плоскостью γ получаем пучок конических сечений γ′(g_k). Находим в пучке γ′(g_k) коническое сечение g'_{C2}, проходящее через точку C_2. В пучке Φ′(φ_k) этому коническому сечению отвечает квадрика φ'_{C2}.

Таким образом, в результате выполнения действий 1…6 найдены квадрики φ_{C2} и φ'_{C2}, проходящие через все заданные точки A_j, B_j, C_j, кроме точки C_3. Эти квадрики, пересекаясь, определяют пучок Θ поверхностей второго

порядка. Для окончательного решения задачи следует найти в пучке Θ квадрику, проходящую через точку C_3.

На основании схемы составлен конструктивный алгоритм реконструкции квадрики, заданной 9 точками.

Алгоритм реконструкции ПВП

Действие 1. Выделив плоскости $\alpha(A_1, A_2, A_3)$, $\beta(B_1, B_2, B_3)$, $\gamma(C_1, C_2, C_3)$, отмечаем линии их пересечения $m=\alpha\cap\beta$, $l=\alpha\cap\gamma$, $n=\beta\cap\gamma$ (рис. 10).

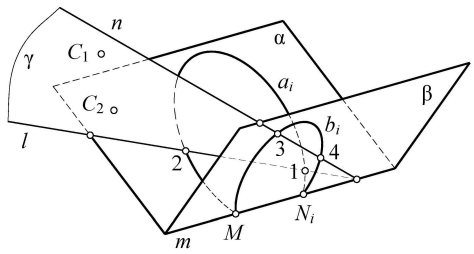

Рис. 10. Поиск квадрики φ_{C2}

Действие 2 *(построение пучка квадрик Φ).* Фиксируем на m произвольную точку M. Точка N_i, бегущая по m, порождает в плоскостях α, β пучки коник $\alpha_M(a_i)$ и $\beta_M(b_i)$. Коника a_i пучка α_M определена точками A_1, A_2, A_3, M, N_i. Коника b_i пучка β_M определена точками B_1, B_2, B_3, M, N_i (на рис. 10 точки A_j, B_j условно не показаны). Точка C_1 совместно с любой парой коник a_i, b_i пучков α_M, β_M определяет пучок квадрик $\Phi(\varphi_i)$.

Действие 3 *(построение пучка коник γ_M).* Рассекая пучок квадрик Φ плоскостью γ, получаем пучок конических сечений $\gamma_M(g_i)$. Чтобы найти базисные точки, достаточно начертить две произвольные коники этого пучка. Для построения какой-либо коники g_1 пучка γ_M фиксируем на m произвольную точку N_1, вычерчиваем коники $a_1(A_1, A_2, A_3, M, N_1)$, $b_1(B_1, B_2, B_3, M, N_1)$ и отмечаем точки $(1_1, 2_1)=a_1\cap l$, $(3_1, 4_1)=b_1\cap n$ пересечения коник a_1, b_1 с плоскостью γ. Через точки 1_1, 2_1, 3_1, 4_1 и через точку C_1 проходит коника g_1. Фиксируя на m другую произвольную точку N_2 и повторяя указанные построения, находим еще одну конику g_2 пучка γ_M. Найденные коники g_1, g_2 пересекаются в четырех точках (одна из которых – точка C_1), указывающих базисные точки пучка γ_M.

Действие 4 *(поиск квадрики φ_{C2}).* В пучке γ_M находим конику g_{C2}, проходящую через точку C_2. Отмечаем точки $(1_{C2}, 2_{C2})=g_{C2}\cap l$, $(3_{C2}, 4_{C2})=g_{C2}\cap n$ пересечения коники g_{C2} с плоскостями α и β. Через точки A_1, A_2, A_3, 1_{C2}, 2_{C2}, лежащие в α, проводим конику a_{C2}. Через точки B_1, B_2, B_3, 3_{C2}, 4_{C2}, лежащие в β, проводим конику b_{C2}. Конические сечения a_{C2}, b_{C2}, g_{C2}, попарно пересекаясь на прямых m, n, l, определяют квадрику φ_{C2}, проходящую через произвольно указанную точку M и через все заданные точки A_j, B_j, C_j, кроме временно исключенной из рассмотрения точки C_3.

Действие 5 *(поиск квадрики φ'_{C2}).* Отмечая на m какую-либо точку M', не совпадающую с M, и повторяя действия 2…4, находим квадрику φ'_{C2}, проходящую через точку M' и через все заданные точки A_j, B_j, C_j, кроме временно исключенной из рассмотрения точки C_3. Плоскость γ пересекает квадрику φ'_{C2} по конике g'_{C2}.

Действие 6 *(построение искомой квадрики φ).* Квадрики $\varphi_{C2}(M)$ и $\varphi'_{C2}(M')$, проходящие через все заданные точки, кроме точки C_3, образуют пучок квадрик Θ. Чтобы найти в пучке Θ искомую квадрику φ, проходящую через C_3, рассмотрим сечение пучка Θ плоскостью γ. Плоскость γ пересекает квадрики φ_{C2} и φ'_{C2} по ранее найденным коническим сечениям g_{C2} и g'_{C2}. Эти коники образуют пучок конических сечений $\omega(g_{C2}\cap g'_{C2})$ с четырьмя базисными точками, две из которых совпадают с точками C_1, C_2. Между кониками пучка ω и квадриками пучка Θ установлено взаимнооднозначное соответствие, поэтому для построения квадрики φ пучка Θ, проходящей через C_3, достаточно в пучке ω найти коническое сечение g, проходящее через точку C_3. Коника g проходит через точки C_1, C_2, C_3 и при этом лежит на одной из квадрик φ пучка Θ. Эта квадрика является искомой. Для ее конструктивного выделения из пучка Θ достаточно отметить точки пересечения $(1_3, 2_3)$ и $(3_3, 4_3)$ коники g с плоскостями α, β и начертить конические сечения $a(A_1, A_2, A_3, 1_3, 2_3)$, $b(B_1, B_2, B_3, 3_3, 4_3)$. Попарно пересекающиеся коники a, b, g, лежащие в плоскостях α, β, γ, полностью определяют реконструируемую поверхность второго порядка, заданную девятью точками.

Проверка. Для проверки алгоритма использованы средства трехмерной компьютерной графики. Моделируем произвольную ПВП (например, эллипсоид вращения), отмечаем на его поверхности девять произвольных точек и "замораживаем" эллипсоид. Выполняя действия 1…6 алгоритма, находим конические сечения a, b, g, проходящие через заданные девять точек и пересекающиеся попарно на линиях m, n, l пересечения плоскостей α, β, γ (рис. 11). "Размораживая" эллипсоид, убеждаемся, что коники a, b, g инцидентны поверхности эллипсоида. Задача решена верно.

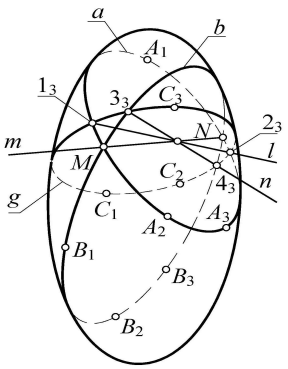

Рис. 11. Проверка

4. Заключение

Найдено графически точное визуальное решение двух известных геометрических задач, поставленных еще в 19 веке. Первая задача – построение F-точек квадратичного кремонова преобразования, заданного 7 парами сопряженных точек. Вторая задача – построение любого количества точек квадрики, заданной 9 точками. Отличительная особенность первой задачи состоит в том, что у нее отсутствует аналитическое решение, поскольку нет универсального алгебраического уравнения, описывающего квадратичное кремоново преобразование. Аналитическое решение второй задачи сводится к решению системы 9 линейных уравнений. Геометрически точное решение обеих задач, предложенное в настоящей работе, может быть конструктивно реализовано только с помощью специализированного программного средства "Универсальный компьютерный коникограф" [2].

5. Литература

[1] Андреев К.А. О геометрических соответствиях в применении к вопросу о построении кривых линий / К.А. Андреев – М.: Издание Московского Математического общества, состоящего при Императорском Московском Университете, 1879. – 168 с.

[2] Короткий В.А. Универсальный компьютерный коникограф / В.А. Короткий, Л.И. Хмарова // Труды 26-й Международной научной конференции GraphiCon 2016 (19-23 сентября 2016), ННГАСУ, Нижний Новгород, Россия. – С. 347-351.

Об авторе

Короткий Виктор Анатольевич, к.т.н., доцент кафедры инженерной и компьютерной графики архитектурно-строительного факультета Южно-Уральского государственного университета. E-mail: ospolina@mail.ru.