

Приближенная оптимизация формы узла лопастей энергоустановки

Андреев С.В.¹, Бондарев А.Е.¹, Бондаренко А.В.², Визильтер Ю.В.², Галактионов В.А.¹, Гудков А.В.², Желтов С.Ю.², Жуков В.Т.¹, Иловайская Е.Б.², Князь В.А.², Мануковский К.В.¹, Новикова Н.Д.¹, Ососков М.В.², Силаев Н.Ж.², Феодоритова О.Б.¹

bond@keldysh.ru|vlgal@gin.keldysh.ru

¹Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва, Россия;

²ФГУП ГосНИИАС, Москва, Россия

Решается задача поиска оптимальной формы узла лопастей энергоустановки (ЭУ) с вертикальной осью. Рассматривается установка роторного типа с тремя изогнутыми лопастями. Ставится задача нахождения оптимальной формы лопастей с учетом ограничений на массу и момент инерции всего узла лопастей. Расчет целевой функции при заданной форме лопастей основан на численном решении трехмерной задачи обтекания в модели уравнений Навье-Стокса вязкого сжимаемого газа. В процессе таких расчетов определяется вращающий момент и силы, действующие на узел лопастей при обтекании его потоком воздуха с заданной скоростью. Для расчетов применялся пакет OpenFOAM. В работе приведен детальный анализ полученных результатов на основе разработанной оптимизационной технологии. В основу этой технологии положена параметризация конструкции энергоустановки тремя ключевыми параметрами. На дискретном множестве значений этих параметров решена задача поиска максимума двух целевых функций, определяющих аэродинамическое качество энергоустановки: модуля полной аэродинамической силы и модуля вращающего момента. В процессе работы создан виртуальный экспериментальный комплекс для моделирования процесса обтекания ЭУ на основе решения уравнений Навье-Стокса. Важной составной частью этого комплекса является визуализация представления результатов расчетов. Для визуального представления использовалась концепция прозрачной счетной области и рендеринга распределения газодинамических функций (давление, температура) по поверхности неподвижного узла лопастей энергоустановки в потоке воздуха. Для одновременной оценки процессов распределения газодинамических функций на поверхности лопастей и в счетной области использовалась комбинация рендеринга по поверхности лопасти и в поперечном сечении, рассекающем лопасть.

Ключевые слова: математическое моделирование, визуализация, оптимизационная задача, параметрический поиск.

Approximate Optimization of Shape of the Blades Assembly for Power Plant

Andreev S. V.¹, Bondarev A. E.¹, Bondarenko A. V.², Vizilter Y. V.², Galaktionov V. A.¹, Gudkov A. V.², Zheltov S. Y.², Zhukov V. T.¹, Ilovayskaya E. B.², Knyaz V. A.², Manukovskii K. V.¹, Novikova N. D.¹, Ososkov M. V.², Silaev N. Zh.², Feodoritova O. B.¹

bond@keldysh.ru|vlgal@gin.keldysh.ru

¹Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, Russia;

²GOSNIAS, Moscow, Russia

The problem of finding the optimal shape of the blades assembly of a power plant with a vertical axis is solved. The power plant of a rotor type with three curved blades is considered. The task is to find the optimal shape of the blades, taking into account the constraints on the mass and inertia moment of the whole blade assembly. Calculation of the objective function for a given shape of the blades is based on the numerical solution of the three-dimensional flow problem in the model of the Navier-Stokes equations for a viscous compressible gas. In the process of such calculations, the torque and the forces acting on the blades assembly are determined when it is flowed by the airflow at a given speed. OpenFOAM software package was used for calculations. The paper provides a detailed analysis of the results obtained on the basis of the developed optimization technology. The basis of this technology is the parametrization of the design of the blades assembly by three key parameters. On a discrete set of values of these parameters, the problem of finding the maximum of two objective functions determining the aerodynamic quality of the power plant is solved, where the objective functions are the module of the total aerodynamic force and the torque module. In the process of work, a virtual experimental complex was created to simulate the process of flow around the blades assembly on the basis of solving the Navier-Stokes equations. An important integral part of this complex is the visualization of the results of calculations. For visual presentation the concept of a transparent calculation area and the rendering of the distribution of gasdynamic functions (pressure, temperature) over the surface of a stationary assembly of power plant blades in the air flow is used. For a simultaneous evaluation of the processes of distribution of gas dynamic functions on the surface of the blades and in the calculation area, a combination of the rendering along the blade surface and in the cross section cutting the blade is applied.

Keywords: mathematical modelling, visualization, optimization problem, parametric search.

1. Введение

Данная работа продолжает цикл исследований, посвященных разработке узла лопастей энергетической установки [1–4]. На предыдущих этапах работы была построена и протестирована вычислительная технология, представленная в работах [1–4] и включающая в себя построение CAD-модели узла лопастей, построение на основе этой модели расчетной сетки, расчеты обтекания,

визуализацию и анимацию результатов в моно- и стереорежимах.

В данной работе приведены результаты расчетных исследований по оптимизации формы узла лопастей энергетической установки (ЭУ) с вертикальной осью. Рассматривается ЭУ роторного типа [1–4] с тремя изогнутыми лопастями, форма которых характеризуется тремя параметрами. Ставится задача определения допустимого диапазона изменения этих параметров и нахождения приближенно оптимальной формы лопастей с

учетом ограничений на массу и момент инерции всего узла лопастей.

Строгое математическое решение оптимизационной задачи для нахождения экстремума заданной целевой функции, например, максимума вращающего момента узла лопастей – практически невозможно. Поэтому мы ограничились приближенным поиском экстремума (максимума) в дискретном пространстве трех ключевых параметров формы узла – двух угловых параметров лопасти и ее ширины. При этом возможное увеличение массы узла и его момента инерции не должно было значительно превышать аналогичные параметры для базового варианта формы узла. Расчет целевой функции при заданных ключевых параметрах основан на численном решении трехмерной задачи обтекания в модели уравнений Навье-Стокса вязкого сжимаемого газа. В процессе такого расчета определяется вращающий момент и силы, действующие на узел лопастей при обтекании его потоком воздуха с заданной скоростью. Для расчетов применялся пакет OpenFOAM (решатель rhoCentralFoam) [7]. Представленные расчеты проводились на вычислительном кластере К-100 в ИПМ им. М.В. Келдыша РАН [5] в режиме параллельных вычислений.

2. Технология расчетов

Построение численной технологии включает в себя ввод геометрической информации, ее обработку, построение сеточной модели, выбор алгоритмов расчета обтекания, расчет функционалов (сил и моментов), визуализацию, обработку результатов. Основой технологии является процесс математического моделирования узла лопастей ЭУ под заданной ветровой нагрузкой на основе уравнений Навье-Стокса. Следующим важным этапом является создание методики расчетов для выбора оптимальной формы лопастей, чему и посвящена данная работа. Для расчетов обтекания ЭУ строится геометрическая сетка, подготовка которой начинается с описания поверхности, ограничивающей трехмерное тело. Эта поверхность импортируется из CAD-пакета и может быть отредактирована, т.е. для получения объемной сетки нужного качества проводится дополнительная подготовка поверхности с использованием автоматических инструментов создания и редактирования поверхностных сеток, включая называемые в англоязычной литературе процедуры «surface wrapper» и «surface remesher». Первая процедура исправляет дефекты CAD-геометрии, создавая на выходе замкнутую поверхность желаемой детализации. Вторая процедура создает треугольную поверхностную сетку с контролем качества (гладкость в областях с большой кривизной, разрешение тонких мест, рост размера ячеек при удалении от областей с высокой детализацией, сохранение топологии объекта, локальное измельчение сетки и др.). На рис. 1 приведен пример исходной поверхностной «CAD-сетки с ошибками» (слева) и «сетки без ошибок» (справа).

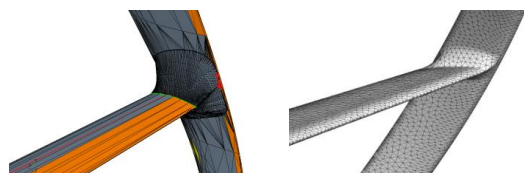


Рис. 1. Пример поверхностной сетки: исходная CAD-поверхность с ошибками (слева) и исправленная треугольная сетка (справа).

На основе результирующей поверхностной сетки строится объемная расчетная сетка. В задачах обтекания

такая сетка, как правило, состоит из двух основных частей: призматической вблизи обтекаемых поверхностей и произвольной многогранной сетки на удалении от поверхностей. Для создания пристеночного призматического слоя с заданными параметрами используется последовательное наращивание призматических слоев. При этом допускается модификация текущего слоя, что обеспечивает создание призматического слоя, проникающего дальше от стенок вглубь расчетной области. Для заполнения внутреннего объема вне пристеночных слоев могут выбираться тетраэдры, гексагональные и многогранные ячейки. Пакет OpenFOAM в общем случае позволяет проводить расчеты на сетках из произвольных многогранных ячеек. В представленных расчетах применялись сетки с ячейками в виде треугольных призм в пристеночных слоях и тетраэдрами вне этих слоев.

3. Задача поиска оптимальной формы

Расчет обтекания ЭУ основан на решении уравнений Навье-Стокса [6]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau$$

$$\frac{\partial (\rho E)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} H) = \nabla \cdot [\vec{u} \cdot \tau + \vec{q}]$$

Здесь $\vec{u}$ – вектор скорости осредненного течения с компонентами (u, v, w) ; ρ – плотность, p – давление, τ – тензор вязких напряжений; $E = e + |\vec{u}|^2 / 2$ – удельная полная энергия газа, e – удельная внутренняя энергия газа; $H = E + p / \rho$ – полная энтальпия; $\vec{q}$ – вектор плотности теплового потока. Система уравнений дополняется уравнением состояния идеального газа: $p = (R / M) \rho T$, M – молекулярный вес, R – универсальная газовая постоянная, $e = C_v T$, C_v – удельная теплоемкость при постоянном объеме, T – температура. Тензор вязких напряжений и вектор теплового потока имеют вид $\tau = 2\mu(S - 1/3 I \nabla \cdot \vec{u})$, $\vec{q} = -\lambda \nabla T$, где $S = 0.5(\nabla \vec{u} + [\nabla \vec{u}]^T)$ – тензор скоростей деформации, $\mu(T)$, $\lambda(T)$ – коэффициенты динамической вязкости и теплопроводности. В данной работе влияние турбулентности не рассматривалось.

Работа энергетической установки с вертикальной осью вращения основана на возникновении вращающего момента за счет действия набегающего потока воздуха на лопасти. Благодаря высокому аэродинамическому качеству лопастей возникает подъемная сила, превышающая силу сопротивления, что в итоге приводит к появлению вращающего момента. Поэтому в качестве основных интегральных характеристик выступает полная аэродинамическая сила и вращающий момент.

Для визуального представления использовалась концепция прозрачной счетной области и рендеринга распределения газодинамических функций (давление, температура) по поверхности неподвижного узла лопастей энергоустановки в потоке воздуха. Для одновременной оценки процессов распределения газодинамических функций на поверхности лопастей и в счетной области использовалась комбинация рендеринга по поверхности лопасти и в поперечном сечении, рассекающем лопасть.

Анимированное представление реализовывалось с помощью подхода, названного «облет камеры» вокруг неподвижного узла лопастей в потоке. Для неподвижного узла лопастей подобный подход дает возможность контролировать распределение газодинамических функций во всех точках объекта, вовремя выявлять появление расчетных дефектов и отлаживать схему организации расчета. Кроме того, нашей задачей являлось создание стереофильма, позволяющего продемонстрировать результаты расчетов (создание последовательности стереопар, каждая из которых является стереокадром фильма), и метод «облета камеры» вокруг объекта является наиболее подходящим для этих целей.

Практически любая CAD-система позволяет визуализировать трехмерный объект с заданными координатами положения по отношению к пользователю. Поэтому задача создания стереофильма сводилась к построению последовательности изображений CAD модели с зафиксированной осью Z, проходящей через ее геометрический центр, и смещением на определенный угол. После каждого такого смещения проводился рендеринг модели, позволяющий достичь фотореалистичности, и сохранение результата в виде графического файла в высоком разрешении.

Одной из важнейших задач моделирования является поиск оптимальной формы узла лопастей ЭУ. Нас интересует такая форма изделия, которая обеспечивает максимальный вращающий момент при варьировании трех параметров узла – двух углов наклона лопастей и ширины каждой лопасти в предположении, что все три лопасти идентичны. На рис. 2 схематически показаны эти параметры: γ_1 – угол между направлением лопасти и осью вращения, γ_2 – угловой размер лопасти, L – ширина лопасти. Заметим, что всюду ниже результаты приводятся для тройки параметров (γ'_1, γ_2, L) , где $\gamma'_1 = 90^\circ - \gamma_1$. Параметры (γ'_1, γ_2, L) меняются в некотором диапазоне. В качестве базового набора выбран результат сканирования опытного образца: $(\gamma'_1, \gamma_2, L)_{\text{баз}} = (55^\circ, 120^\circ, 20 \text{ см})$. При вариациях γ'_1 принимает значения $45^\circ, 50^\circ, 55^\circ, 60^\circ, 65^\circ$; γ_2 – значения $100^\circ, 110^\circ, 120^\circ, 130^\circ$; ширина лопасти L выбирается из набора $0.8L_{\text{баз}}, 0.9L_{\text{баз}}, L_{\text{баз}}, 1.1L_{\text{баз}}, 1.2L_{\text{баз}}$.

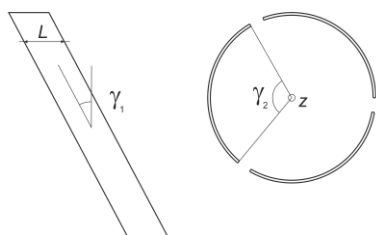


Рис. 2. Варьируемые параметры (γ_1, γ_2, L) .

Дополним схематическую картину, представленную на рис. 2, трехмерными изображениями, см. рис. 3–4. Рисунки представляют изменение формы узла лопастей при вариации вышеописанных параметров. Базовый вариант отмечен красным цветом.

Рассмотрим задачу условной оптимизации: найти значения параметров $x^* = ((\gamma'_1)^*, \gamma_2^*, L^*) = \arg\max M(\gamma'_1, \gamma_2, L)$ при выполнении ограничений на x^* . В качестве целевой функции M выбирается полная аэродинамическая сила $\vec{F}$ или вращающий момент $\vec{M}$, а в качестве ограничений – условия $45^\circ \leq \gamma'_1 \leq 65^\circ$, $100^\circ \leq \gamma_2 \leq 130^\circ$, $0.8L_{\text{баз}} \leq L \leq 1.2L_{\text{баз}}$.

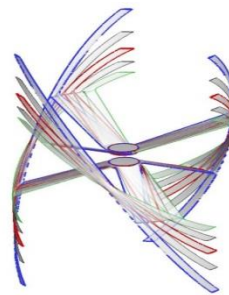


Рис. 3. Влияние γ'_1 на форму узла лопастей: 45° (зеленый), 50° (серый), 55° (красный), 60° (серый), 65° (синий).

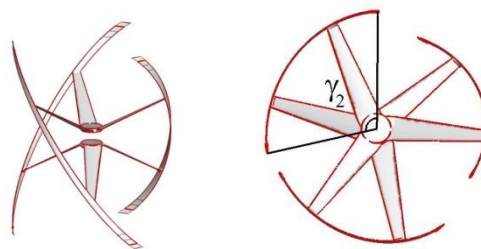


Рис. 4. Влияние γ_2 на форму узла лопастей.

Аналитической связи между целевой функцией и вектором независимых переменных x^* не существует, эту связь устанавливает трехмерная система уравнений Навье-Стокса. С формальной точки зрения задача поиска x^* сводится к задаче нелинейного программирования. Для приближенного решения этой задачи воспользуемся сеточным методом, определяя значений целевой функции на сетке узлов – дискретном наборе значений параметров γ'_1, γ_2, L в заданном диапазоне. Наибольшее значение целевой функции на данной сетке принимается за искомый экстремум. Предварим приближенную оптимизацию процедурой параметрического поиска для оценки направления изменения параметров. Для этого последовательно проварьируем отдельно каждый из параметров, т.е. исследуем три направления:

$$\begin{aligned} P_1 &= (\gamma'_1(N), (\gamma_2)_{\text{баз}}, L_{\text{баз}}); \\ P_2 &= ((\gamma'_1)_{\text{баз}}, \gamma_2(N), L_{\text{баз}}); \\ P_3 &= ((\gamma'_1)_{\text{баз}}, (\gamma_2)_{\text{баз}}, L(N)), \end{aligned}$$

где N – номер варианта из допустимого диапазона. Для каждого направления точки пронумерованы по возрастанию параметра. В результате проведения расчетов было установлено, что при увеличении параметров γ'_1, γ_2, L от значений базового варианта происходит увеличение, как модуля вращающего момента, так и модуля аэродинамической силы. Оценим возможное увеличение этих функций. Сначала зафиксируем ширину лопасти $L = L_{\text{баз}}$ и проварьируем γ'_1 и γ_2 в диапазонах их изменения. На рис. 6 показана зависимость модуля аэродинамической силы $F(\gamma'_1, \gamma_2)$ и модуля вращающего момента $M(\gamma'_1, \gamma_2)$ от вариации углов γ'_1 и γ_2 .

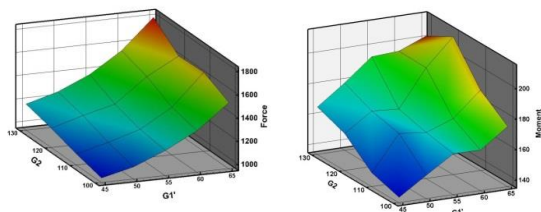


Рис. 6. $F(\gamma'_1, \gamma_2)$ (слева) и $M(\gamma'_1, \gamma_2)$ (справа); $L = L_{\text{баз}}$.

Анализ полученных результатов говорит, что в рассматриваемом диапазоне изменения γ'_1 и γ_2 при $L = L_{\text{баз}}$ максимальный вращающий момент достигается при максимальных значениях γ'_1 и γ_2 , что обеспечивает увеличение вращающего момента на 28%. При вариации ширины лопасти и фиксированных значениях параметров $(\gamma'_1)_{\text{баз}}$ и $(\gamma_2)_{\text{баз}}$ наблюдается почти линейное увеличение вращающего момента. Так рост L на 20% приводит к росту вращающего момента на 16%. Одновременный рост всех трех параметров в принятых диапазонах приводит к росту момента инерции на 50% по сравнению с базовым вариантом геометрии. Считая постоянной плотность материала лопастей, учет ограничений по массе можно вести с помощью контроля объема узла лопастей. Все дальнейшие рассмотрения проводятся для слоя данных с максимальной шириной лопасти $L = 1.2L_{\text{баз}}$. На рис. 7 представлена зависимость модуля аэродинамической силы (слева) и модуля вращающего момента (справа) от γ'_1 и γ_2 для $L = 1.2L_{\text{баз}}$.

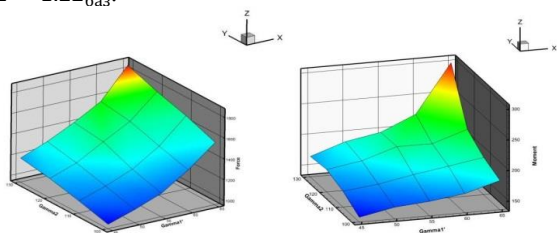


Рис. 7. $F(\gamma'_1, \gamma_2)$ (слева) и $M(\gamma'_1, \gamma_2)$ (справа); $L = 1.2L_{\text{баз}}$.

На рис. 8 (слева) показаны объемы узла лопастей $V(\gamma'_1, \gamma_2)$ в зависимости от значений угловых параметров при фиксированном значении $L = 1.2L_{\text{баз}}$. Плоскость, ограниченная красным, соответствует значению объема для базового варианта $V = V_{\text{баз}}$. Соответственно, плоскость, ограниченная синим, отвечает значению объема $V = 1.1V_{\text{баз}}$. Линии пересечения обеих плоскостей с поверхностью значений объемов ограничивают вариацию формы изделия. На рис. 8 (справа) показана область допустимых значений при учете ограничений по объему на плоскости вариации угловых параметров: она заключена в области, ограниченной толстыми красной $V = V_{\text{баз}}$ и синей $V = 1.1V_{\text{баз}}$ линиями.

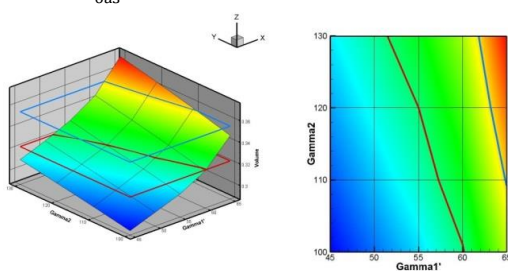


Рис. 8. Объем узла лопастей при $L = 1.2L_{\text{баз}}$ (слева) и область ограничения по объему (справа).

Аналогичным образом определяются ограничения для момента инерции. Они показаны на рис. 9; слева изображен момент инерции в виде трехмерной поверхности $M_i(\gamma'_1, \gamma_2)$. Плоскость, ограниченная красным, соответствует значению $M = M_{\text{баз}}$, а ограниченная синим – $M = 1.1M_{\text{баз}}$. Линии пересечения обеих плоскостей с поверхностью значений моментов инерции ограничивают вариацию формы изделия. На рис. 9 (справа) диапазон допустимых значений представлен на плоскости вариации угловых параметров в виде области между толстыми красной и синей линиями.

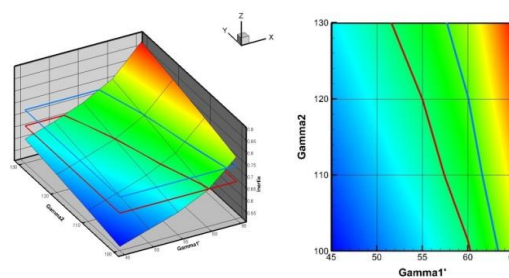


Рис. 9. Момент инерции (слева) и область ограничения по моменту инерции (справа) при вариации углов, $L = 1.2L_{\text{баз}}$.

Таким образом, для заданного слоя данных, соответствующих $L = 1.2L_{\text{баз}}$, мы получили ограничения по объему (рис. 8 справа) и моменту инерции (рис. 9 справа). Для совместного учета этих ограничений изобразим их на одном рисунке и выберем диапазон вариации углов, соответствующий наиболее жесткому ограничению, см. рис. 10, где на плоскости вариации угловых параметров совмещены ограничения по объему (красные линии) и моменту инерции (пунктирные голубые линии). Как видно на рисунке, нижние ограничения по объему и моменту инерции практически совпадают, а верхние существенно разнятся. Очевидно, что ограничения по моменту инерции являются более жесткими, чем ограничения по объему. В качестве наиболее жесткого ограничения при суммарном учете ограничений по объему и моменту инерции необходимо выбрать диапазон вариации угловых параметров, заключенный между пунктирными голубыми линиями.

Оценим влияние полученных при совместном учете ограничений на вращающий момент, который мы рассматриваем в настоящем исследовании как основную силовую характеристику узла лопастей.

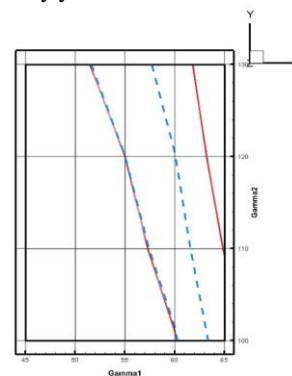


Рис. 10. Совместный учет ограничений по объему и моменту инерции при вариации углов, $L = 1.2L_{\text{баз}}$.

Для этой цели на рис. 11 показано совмещение поверхности вращающего момента (см. рис. 9, справа) при вариации углов и полученного диапазона ограничений (см. рис. 10). Распределение вращающего момента на рис. 11 (слева) представлено трехмерной поверхностью, а ограничения представлены вертикальными поверхностями, отсекающими нужный диапазон на поверхности момента.

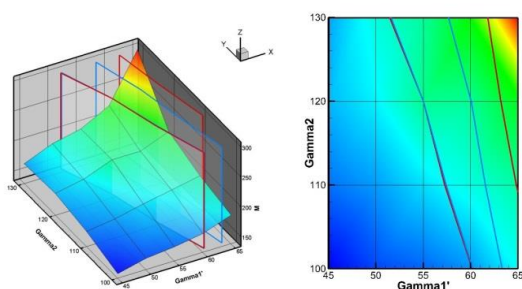


Рис. 11. Момент инерции с учетом ограничений при вариации угловых параметров в 3D (слева) и 2D (справа).

Для наглядности на рис. 11 (справа) представлены данные в двумерном виде. Это представление даст возможность более точно определить диапазон вариации угловых параметров, обеспечивающий максимум вращающего момента с учетом наложенных ограничений на изменение объема и момента инерции узла лопастей. Можно утверждать, что при учете выбранных ограничений по объему и моменту инерции нужный диапазон заключается в пределах вариации угла γ_1' от 55° до 60° , а угла γ_2 – от 120° до 125° . В итоге выделен диапазон геометрических параметров, обеспечивающих увеличение вращающего момента и найдены приближенно оптимальные параметры.

4. Заключение

Выполнены расчетные исследования по определению оптимальной формы узла лопастей с учетом возможных ограничений на конструкцию, проведен детальный анализ полученных результатов на основе разработанной оптимизационной технологии. В основу этой технологии положена параметризация конструкции тремя ключевыми параметрами. На дискретном множестве значений этих параметров решена задача поиска максимума двух целевых функций, определяющих аэродинамическое качество энергоустановки: модуля полной аэродинамической силы и модуля вращающего момента. В процессе работы создан виртуальный экспериментальный комплекс для моделирования процесса обтекания ЭУ на основе решения уравнений Навье-Стокса. Следует отметить, что визуализация представления результатов расчетов является важнейшей частью созданного комплекса, обеспечивая не только контроль и верификацию результатов на всех этапах работы вычислительной технологии, но и решение оптимизационной задачи с рядом ограничивающих условий.

5. Благодарности

Данная работа выполнена при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-01-00553а и 17-01-00444а).

6. Литература

- [1] Андреев С.В., Бондарев А.Е., Бондаренко А.В., Визильтер Ю.В., Галактионов В.А., Гудков А.В., Желтов С.Ю., Жуков В.Т., Иловайская Е.Б., Князь В.А., Мануковский К.В., Новикова Н.Д., Ососков М.В., Силаев Н.Ж., Феодоритова О.Б., Бондарева Н.А. *Моделирование и визуализация работы узла лопастей сложной формы в энергетической установке* // Журнал «Научная визуализация», 2015, т. 7, № 4, С. 1-12.
- [2] Андреев С.В., Бондарев А.Е., Бондаренко А.В., Визильтер Ю.В., Галактионов В.А., Гудков А.В., Желтов С.Ю., Жуков В.Т., Иловайская Е.Б., Князь В.А., Мануковский К.В., Новикова Н.Д., Ососков М.В., Силаев Н.Ж., Феодоритова О.Б., Бондарева Н.А. *Моделирование и визуализация работы энергетической установки сложной формы в режиме стереоанимации* // Труды 25-й Международной Конференции по Компьютерной Графике и Зрению ГрафиКон'2015, Протвино, Россия, 22-25 сентября 2015 г., с. 183-187.
- [3] Андреев С.В., Бондарев А.Е., Бондаренко А.В., Желтов С.Ю., Жуков В.Т., Иловайская Е.Б., Мануковский К.В., Новикова Н.Д., Ососков М.В., Феодоритова О.Б. *Моделирование и визуализация работы энергетической установки сложной формы* // Математическое моделирование, 2016. 28:9, 125–136.
- [4] Бондарев А.Е., Жуков В.Т., Мануковский К.В., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б. *Разработка и организация математического моделирования обтекания неподвижной лопатки энергетической установки.* – Препринт № 60 ИПМ им. Келдыша, 2014
- [5] Гибридный вычислительный кластер К-100. URL: <http://www.kiam.ru/MVS/resources>
- [6] Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. *Гидродинамика.* – Москва, Наука, 1986.
- [7] Программный комплекс OpenFOAM. URL: <http://www.openfoam.com>