

# Теорема Котельникова-Шеннона

## Введение.

Напомним определения понятий дискретизации и интерполяции.

Определение. Представление непрерывного (аналогового) сигнала  $x(t)$  дискретной последовательностью отсчетов  $x(t_k)=x(k \Delta t)$ , по которым с заданной точностью можно восстановить исходный непрерывный сигнал, называется **дискретизацией** на равномерной сетке.

Определение. Процесс восстановления дискретизированного сигнала называется **интерполяцией**.

Допустим, у нас есть непрерывное изображение  $i(x,y)$ . После дискретизации мы получаем дискретное изображение  $I(x_k, y_m)$ . Затем интерполируем его и переходим к изображению  $i'(x,y)$ .

Естественно возникает вопрос :

Как нужно проводить дискретизацию, чтобы не происходила потеря информации, т.е. при каких условиях исходное изображение  $i(x,y)$  совпадает с восстановленным  $i'(x,y)$ ?

Ответ на этот вопрос может быть получен из теоремы Котельникова-Шеннона.

## Теорема Котельникова-Шеннона.

Напомним определения пространств  $L_1$  и  $L_2$  и норм в них.

Определение. Пространством  $L_1(\mathbb{R})$  называется пространство комплекснозначных или действительных функций, интегрируемых на множестве  $\mathbb{R}$ .

Определение. Нормой элемента  $f$  в пространстве  $L_1(\mathbb{R})$  называется величина

$$\|f\|_{L_1} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx$$

Определение. Пространством  $L_2(\mathbb{R})$  называется пространство комплекснозначных или действительных функций интегрируемых на множестве  $\mathbb{R}$  с квадратом.

$L_2(\mathbb{R})$  – евклидово пространство, скалярное произведение для элементов  $f$  и  $g$  в нем вводится как  $(f,g) = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x) dx$ .

Определение. Нормой элемента  $f$  в пространстве  $L_2(\mathbb{R})$  называется величина

$$\|f\|_{L_2} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} f^2(x) dx}$$

Преобразование Фурье  $F(\gamma)$  функции  $f(t)$  определяется как

$$F(\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{2\pi i t \gamma} dt$$

для всех  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

Обозначим через  $A(\mathbb{R})$  множество преобразований Фурье всех функций  $f$ , принадлежащих пространству  $L_1(\mathbb{R})$ .

**Теорема.** Пусть  $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$  или  $f \in L_2(\mathbb{R})$ . Предположим, даны константы  $T, \Omega > 0$  такие что

$$F(\gamma) \text{ равна } 0 \text{ вне сегмента } [-\Omega, \Omega] \quad (1)$$

и

$$0 < 2T\Omega \leq 1. \quad (2)$$

Тогда

$$f(t) = 2T\Omega \sum f(nT) \frac{\sin[2\pi\Omega(t-nT)]}{2\pi\Omega(t-nT)}, \quad (3)$$

причем ряд сходится поточечно на  $\mathbb{R}$ , если  $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$ , и ряд сходится равномерно, если  $f \in L_2(\mathbb{R})$ .

Т.о., сигнал, описываемый непрерывной функцией времени  $f(t)$  с ограниченным спектром, полностью определяется своими значениями, отсчитанными через интервалы времени  $T=1/(2\Omega)$ , где  $\Omega$  - ширина спектра сигнала.

**Доказательство:**

1) Пусть  $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R})$ .

Введем функцию  $G(\gamma)$

$$G(\gamma) = \begin{cases} F(\gamma), & \text{если } |\gamma| < \Omega, \\ 0, & \text{если } \Omega < |\gamma| \leq \frac{1}{2T}. \end{cases}$$

Продолжим ее периодически с периодом  $1/T$  на  $\mathbb{R}$ . Тогда можем разложить  $G(\gamma)$  в ряд Фурье, имеющий вид

$$G(\gamma) = \sum_n c_n e^{-\pi i n \gamma (2T)},$$

где

$$c_n = T \int_{-\frac{1}{2T}}^{\frac{1}{2T}} G(\gamma) e^{\pi i n \gamma (2T)} d\gamma.$$

Из определения функции  $G(\gamma)$  и из формулы обращения  $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma$  следует, что  $c_n = T f(nT)$ .

$$\begin{aligned} f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \quad \text{<по формуле обращения>} \\ &= \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \quad \text{<по определению функции } G(\gamma)\text{>} \\ &= \int_{-\Omega}^{\Omega} \sum_n c_n e^{-2\pi i n T \gamma} e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \quad \text{<подставили выражение для ряда Фурье функции } G(\gamma)\text{>} \end{aligned}$$

$$= \sum c_n \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{2\pi i(t-nT)\gamma} d\gamma \quad \text{-<ряды Фурье интегрируемых функций можно интегрировать}$$

почленно>

$$= \sum c_n \frac{\sin(2\pi\Omega(t-nT))}{\pi(t-nT)} \quad \text{-<получаем простым интегрированием>}$$

$$= 2T\Omega \sum f(nT) \frac{\sin[2\pi\Omega(t-nT)]}{2\pi\Omega(t-nT)} \quad \text{-<т.к. } c_n = Tf(nT), \text{ умножили и поделили на } 2\Omega >,$$

ч.т.д.

2) Пусть  $f \in L_2(\mathbb{R})$ .

В пространстве  $L_2$  теорема доказывается аналогично. Так же вводим функцию  $G(\gamma)$ , периодически продолжаем ее на  $\mathbb{R}$  и раскладываем в ряд Фурье.

Заметим, что по определению преобразования Фурье в  $L_2$

$$\| f(t) - \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \|_{L_2} = 0. \quad (5)$$

Пусть  $S_n(\gamma)$ -n-я частичная сумма ряда Фурье функции  $G(\gamma)$ .

Введем функцию  $\chi_{\Omega}(\gamma) = \begin{cases} 1, & \gamma \in [-\Omega, \Omega] \\ 0, & \gamma \notin [-\Omega, \Omega] \end{cases}$ .

Тогда ,

$$\begin{aligned} & \| \int_{-\Omega}^{\Omega} G(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma - \int_{-\Omega}^{\Omega} S_n(\gamma) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \|_{L_2} \\ &= \| \int \chi_{\Omega}(\gamma) (G(\gamma) - S_n(\gamma)) e^{2\pi i t \gamma} d\gamma \|_{L_2} \quad \text{-<по определению } \chi_{\Omega}(\gamma) > \\ &= \| \chi_{\Omega}(\gamma) (G(\gamma) - S_n(\gamma)) \|_{L_2} \quad \text{-< по теореме Планшереля } \| f(t) \|_{L_2} = \| F(\gamma) \|_{L_2} > \\ &= \| G(\gamma) - S_n(\gamma) \|_{L_2[-\Omega, \Omega]}. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как  $S_n$ -n-я частичная сумма ряда Фурье  $G$ , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \| G(\gamma) - S_n(\gamma) \|_{L_2[-\Omega, \Omega]} = 0$$

Используя это соотношение, (5) и (6), а также неравенство Гельдера и определение коэффициентов  $c_n$ , получаем требуемое в теореме равенство.

Теорема доказана.

## Замечания к теореме Котельникова-Шеннона .

Замечание 1. Основой доказательств теоремы в пространствах  $L_1$  и  $L_2$  является возможность перехода от преобразования Фурье к рядам Фурье.

Замечание 2. Исследуем вопрос о том, можно ли ослабить условие (2) теоремы.

Приведенный ниже пример показывает, что этого сделать нельзя.

Допустим, константы  $T, \Omega > 0$  удовлетворяют неравенству  $2T\Omega > 1$ .

Возьмем функцию  $f(t) = \frac{\sin(\frac{\pi t}{T})}{\frac{\pi t}{T}} \in L_2(\mathbb{R})$ .

Ясно, что преобразование Фурье этой функции  $F(\gamma) = T \chi_{\left(\frac{1}{2T}\right)}(\gamma)$ .

Следовательно, условие (1) выполнено.

Так как  $f(nT) = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq 0 \\ 1, & \text{если } n = 0 \end{cases}$ , то правая часть формулы (3)  $g(t) = 2T\Omega \frac{\sin 2\pi\Omega t}{2\pi\Omega t}$ .

Функции  $f$  и  $g$  не равны, так как обе непрерывны на  $\mathbb{R}$  и  $f(0)=1$ , а  $g(0)=2T\Omega > 1$ .

Т.е. правая часть не равна левой части, что противоречит условию, следовательно предположение о том, что  $2T\Omega > 1$  не верно.

Итак, мы доказали, что, если функция  $f$  разложима в ряд Котельникова (3) и спектр ее равен нулю вне отрезка  $[-\Omega, \Omega]$ , выполняется соотношение  $0 < 2T\Omega \leq 1$ .

Замечание 3. В формуле (3) константу  $T$  обычно называют периодом дискретизации, последовательность  $\{f(nT) : n \in \mathbb{Z}\}$  – последовательностью дискретизированных значений. Частота  $2\Omega$  называется частотой Найквиста или частотой дискретизации. Это минимальная частота, с которой нужно посылать импульсы, чтобы не было потери информации.

$T \equiv \frac{1}{2\Omega}$  – максимальный период дискретизации, т.е. максимальный приемлемый промежуток времени между передаваемыми импульсами.

Замечание 4. На практике восстановленная функция  $f_0(t)$ , как правило, не совпадает точно передаваемой функцией  $f(t)$ . Ошибка обусловлена, например, тем, что спектр передаваемой функции  $f(t)$  обычно ограничен не резко. Это вытекает хотя бы из того факта, что все реальные сигналы ограничены во времени и, следовательно, имеют неограниченные строго спектры. Выбор интервалов отсчетов  $T > 0$  означает, что все спектральные составляющие спектра с частотами  $\omega > \Omega_{\max} = \pi/T$  не передаются и не могут быть восстановлены.

Если  $2T\Omega > 1$ , то исходная функция не может быть восстановлена, возникающий эффект называется aliasing.