

# Создание NURBS поверхностей в системе трехмерного компьютерного моделирования КЗ

Марина Дмитриевна Оноприйко

НИИ Механики, Нижегородский Государственный Университет

Нижний Новгород, Россия

Евгений Владимирович Попов

Нижегородский архитектурно-строительный университет

Нижний Новгород, Россия

## Аннотация

В статье представлены основные методики создания NURBS поверхностей, использованные в системе трехмерного компьютерного моделирования КЗ. Демонстрируется использование NURBS как стандартного средства геометрического проектирования и восстановления поверхностей, что резко повышает эффективность всей системы в целом.

**Ключевые слова:** NURBS, Поверхность, Интерполяция.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Система КЗ создавалась как система твердотельного моделирования методом граничного представления (B-Rep), т.е. сначала строятся примитивы, используя наборы элементарных параметрических тел и формообразующие графические операции, а затем выполняются построения из них с помощью теоретико-множественных (булевых) операций. B-Rep оперирует с моделью в терминах ребер и граней, которые образуют трехмерную граничную поверхность объемного тела. Данные об этой поверхности структурируются в терминах ее топологии (описание граней) и ее геометрии (описание формы, размещение в пространстве вершин, ребер и граней). Главным достоинством моделирования методом B-Rep является возможность легкой модификации граничной поверхности. Это дало возможность использовать КЗ для: моделирования в различных отраслях машиностроения; размещения и моделирования мебели и торгового оборудования; строительства и архитектуры, стереолитографии, визуализации процесса фрезерной обработки. Однако, при использовании КЗ в проектировании судов (компоновка отсеков), появилась необходимость формировать поверхности более сложной формы, для которых B-Rep не давал достаточно хороших результатов. Поэтому было решено добавить в систему КЗ возможность моделирования сложных геометрических объектов. В качестве инструмента моделирования по ряду причин были выбраны NURBS:

- NURBS обеспечивает гибкость при моделировании большего множества поверхностей, посредством манипулирования управляющими точками и весами в них;
- создание NURBS поверхности достаточно быстро и вычислительно недорого;
- NURBS инвариантны относительно аффинных преобразований;

- NURBS имеют общие математические формы как для стандартных аналитических поверхностей, так и для поверхностей свободной формы, что унифицирует процесс нахождения линий пересечения поверхностей.

В настоящей статье представлен математический аппарат, использованный в системе КЗ для моделирования поверхностей[7]. Предоставлены примеры поверхностей, созданных в системе КЗ.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Математическое определение NURBS поверхностей относительно простое. Поверхность NURBS – это рациональное обобщение рациональной B-сплайновой поверхности, полученное с помощью тензора. Такая поверхность определяется следующим образом:

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}(u, v) \mathbf{P}_{i,j}; \quad (1)$$

где:

$$R_{i,j}(u, v) = \frac{w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}{\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m w_{i,j} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)}$$

$w_{i,j}$  - вес в соответствующем узле;

$\mathbf{P}_{i,j}$  - узлы, формирующие управляющую сетку;

$N_{i,p}(u), N_{j,q}(v)$ , - нормализованные B-сплайны степени  $p$  и  $q$  соответственно в направлении  $u$  и  $v$ ;

Управляющие вектора узлов имеют вид:

$$\mathbf{V} = \{0, 0, \dots, 0, v_{q+1}, \dots, v_{s-q-1}, 1, 1, \dots, 1\}$$

$$\mathbf{U} = \{0, 0, \dots, 0, u_{p+1}, \dots, u_{r-p-1}, 1, 1, \dots, 1\} \quad (1a)$$

где конечные узлы повторяются  $p+1$  и  $q+1$  раз соответственно; и  $r=n+p+1$ ,  $s=m+q+1$ . Хотя поверхность (1) и была получена обобщением тензорной формы поверхности, в общем случае, поверхность NURBS не является поверхностью тензорного произведения.

Более логично представить NURBS поверхность, используя модель, которая отображает проективное n-мерное пространство в Евклидово (n+1)-мерное пространство. Т.е.

$$\varphi(x, y, z, w) = \begin{cases} \left( \frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w} \right) & \text{если } w \neq 0 \\ (x, y, z) & \end{cases}$$

Тогда NURBS поверхность запишется в 4-х мерном пространстве следующим образом:

$$\mathbf{S}^w(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m N_{i,p}(u) N_{j,q}(v) \mathbf{P}_{i,j}^w \quad (2)$$

где  $\mathbf{P}_{i,j}^w = \{w_{i,j}x_{i,j}, w_{i,j}y_{i,j}, w_{i,j}z_{i,j}, w_{i,j}\}$

Отображение данной поверхности в 3-х мерное пространство

$\mathbf{S}(u, v) = \varphi\{\mathbf{S}^w(u, v)\}$  дает описание поверхности в виде (1). Заметим, что  $\mathbf{S}^w(u, v)$  поверхность

тензорного произведения в 4-х мерном пространстве, тогда  $\mathbf{S}(u, v)$  как кусочно-гладкая рациональная поверхность

в 3-х мерном пространстве, а не поверхность тензорного произведения, т.к.  $R_{i,j}(u, v)$  не инвариантное произведение базисных функций. Эта модель полезна не только для понимания NURBS, но и для получения эффективных вычислительных алгоритмов.

## 2.1 Моделирование поверхностей.

### Интерполяция.

Предположим, что имеется  $\mathbf{Q}_{r,s}$   $s = \overline{0, m}$

$r = \overline{0, n}$  множество из (n+1)x(m+1) исходных точек

Необходимо построить поверхность степени (p,q), которая согласуется с в соответствующих параметрических значениях ,так, что:

$$\mathbf{Q}_{r,s} = \mathbf{S}(u_r, v_s) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{P}_{i,j} N_{i,p}(u_r) N_{j,q}(v_s) \quad (3)$$

Решение задачи интерполяции через заданные точки происходит в три шага:

- 1) Вычисляем параметрические значения в обоих направлениях. Для этого воспользуемся методикой усреднения [4].
- 2) По вычисленным параметрическим значениям строим управляющие вектора  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  в форме (1а).
- 3) Теперь можно напрямую решить матричное уравнение

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{Q}_{r,s}]$$

$$\mathbf{P} = [\mathbf{P}_{i,j}]$$

$$\mathbf{U} = [N_{i,p}(u_r)]$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{V}^{-1}$$

$$\mathbf{V} = [N_{j,q}(v_s)]$$

Поскольку  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  положительно определенные и диагонально ограниченные, то они имеют обратную матрицу[6]. Следовательно, для получения точек управляющего многогранника имеем матричное уравнение:

Данный метод обеспечивает  $C^1$  непрерывную поверхность с хорошей параметризацией, однако:

- 1) Исходные точки должны быть расположены достаточно регулярно, в противном случае форма полученной поверхности может быть неудовлетворительна из-за появления нежелательных осцилляций. Для решения этой проблемы в точках сетки могут быть заданы касательные "сдерживания". При этом, хотя матрицы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  не потеряют своей положительной определенности и диагональной структуры, размерность их увеличится и, как следствие, увеличится число вычисляемых управляющих узлов.
- 2) Если количество исходных точек достаточно велико, то матрицы  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$  имеют высокую размерность и их обращение занимает много времени.
- 3) В реальных приложениях гарантировать, что точки точно лежат на поверхности невозможно. Следовательно, интерполяция не даст нужной формы поверхности.

Таким образом, глобальную интерполяцию лучше использовать для небольших кусков поверхности с последующим объединением этих кусков в кусочногладкую поверхность.

На рисунке 1 изображена поверхность, полученная в результате интерполяции исходной сети размером 11x11 точек.

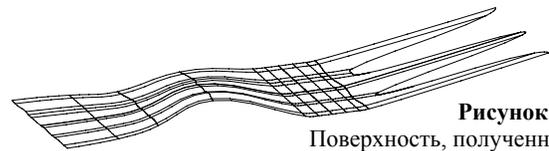


Рисунок 1:  
Поверхность, полученная интерполяцией исходных точек.

## 2.2 Моделирование поверхностей.

### Подгонка поверхности.

Во многих приложениях в качестве исходных данных приходит большое количество точек, часть из которых – ошибочна. В результате интерполяции получается осциллирующая поверхность. В данном случае лучшим решением будет аппроксимация – т.е. генерация такой поверхности, которая проходит вблизи исходных точек и только через некоторые из них. Наиболее популярный метод такой аппроксимации – квадратичная подгонка. Запишем уравнение (3) в матричной форме:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{U} \mathbf{V} \mathbf{P} \quad (4)$$

где

$$\mathbf{UV} = [N_{i,p}(u_r), N_{j,q}(v_s)]$$

Поскольку управляющих точек должно быть меньше, чем исходных, то уравнение (4) – избыточно и может быть разрешено приблизительно следующим образом[6]:

$$\mathbf{Q}^* = (\mathbf{UV}^T \mathbf{UV})^{-1} \mathbf{UV}^T \mathbf{P} \quad (5)$$

Основываясь на вышесказанном, получаем алгоритм квадратичной подгонки поверхности:

- 1) Назначаем параметризацию для исходных точек.
- 2) Строим квадратичную подгонку используя уравнение (5). Оцениваем полученный кусок поверхности: так как допустимое отклонение в заданных точках не определено, то решение ищется последовательными приближениями с оценкой результатов на каждом шаге.
- 3) Если подгонка неприемлема, то вычисляем новую параметризацию и переходим на шаг 2.

Данный алгоритм обычно дает подходящие подгонки, если восстанавливаемая поверхность хорошо описывается NURBS куском на сетке малого размера. Для более сложных по форме поверхностей предпочтительней использовать алгоритм локального сглаживания поверхности с последующим объединением этих кусков в кусочногладкую поверхность.

- 1) Разбиваем исходную сетку точек на клетки так, чтобы внутрь каждой клетки попало не менее 9 исходных точек.
- 2) Назначаем параметризацию для исходных точек внутри клетки.
- 3) Строим квадратичную подгонку коника через точки данной клетки используя уравнение (5). Вычисляем точку на поверхности в параметрической точке (0,5,0,5).
- 4) Повторяем шаг 2 и 3 для различных параметризаций.
- 5) Оцениваем полученные куски поверхности. Если расстояние между точками поверхности, полученными на шаге 3, меньше заданного отклонения, то подгонка приемлема и результирующая поверхность подгоняется с учетом вычисленной на шаге 3 точки. В противном случае клетка должна быть разбита на подклетки и процесс повторен для каждой подклетки с шага 2.
- 4) Объединяем полученные куски поверхности в кусочногладкую поверхность.

На рисунке 2 изображена пробная подгонка поверхности. В результате неудачного разбиения исходных точек на клетки, получили значительное отклонение построенной поверхности от исходных точек. Следовательно, клетки, в которых отклонение от заданных точек велико, должны быть поделены на подклетки и поверхность перестроена.

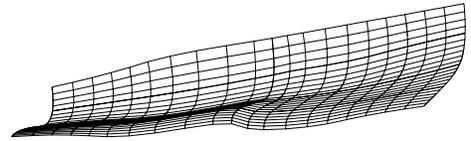


Рисунок 2: Пробная подгонка поверхности по заданным точкам.

Рисунок 3 изображает поверхность, построенную на новых клетках. Эта методика очень надежна и, несмотря на использование коников, может быть использована для подгонки поверхностей к очень сложным исходным точкам.

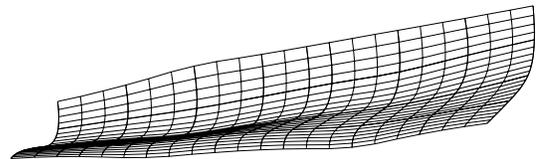


Рисунок 3: Результирующая поверхность.

### 2.3 Моделирование поверхностей по поперечным сечениям.

Предположим, задано множество NURBS кривых, через которые должна проходить моделируемая поверхность. Тогда моделирование поверхности происходит в три шага:

- 1) Все кривые поперечных сечений должны быть совместимыми, т.е. иметь одинаковую степень  $p$ , число управляющих точек  $n$  и определены на одном управляющем векторе узлов  $\mathbf{U}$ . Тогда эти кривые:

$$\mathbf{C}_k^w(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{Q}_{i,k}^w N_{i,p}(u) \quad k = \overline{0, m} \quad (6)$$

являются изопараметрическими линиями в направлении  $u$ , определенными на общем векторе узлов  $\mathbf{U}$ .

- 2) Вычисляем вектор  $\mathbf{V}$  для интерполяции NURBS-кривых со степенью  $q$  для некоторого фиксированного значения  $u$ .

$$S^w(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m P_{i,j}^w N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)$$

Используя полученный вектор  $\mathbf{V}$ , создаем кривые, проходящие через управляющие точки уравнения (6), т.е.

$$C_i^w(v) = \sum_{j=0}^m P_{i,j}^w N_{j,q}(v) \quad i = \overline{0, n} \quad (7)$$

Управляющие точки уравнения (7) – это управляющие точки для поверхности, созданной по заданным сечениям и определенной на узловых векторах  $\mathbf{U}$  и  $\mathbf{V}$ :

Несмотря на то, что поверхность проходит через заданные сечения, форма полученной поверхности существенно зависит от ряда факторов:

- 1) Положения сечений: если сечения расположены крайне неравномерно, то это может привести к появлению нежелательных осцилляций на поверхности.
- 2) Выбор вектора  $\mathbf{V}$  на шаге 2: неудачный выбор параметра  $u$  может привести к вырожденным участкам на моделируемой поверхности.
- 3) Непрерывность исходных сечений: если используются кратные управляющие узлы, то кривая в будет иметь непрерывность  $C^1$  в 3D, а в 4D - только  $C^0$  непрерывна. Следовательно данный алгоритм даст только  $C^0$  непрерывную поверхность в 4D, отображение которой на 3D будет иметь разрывы.

На рисунке 4 изображены исходные поперечные сечения для построения поверхности. Сечения расположены достаточно равномерно, поэтому для построения вектора  $\mathbf{V}$ , был выбран параметр  $u=0$ . На рисунке 5 изображена полученная в результате поверхность.

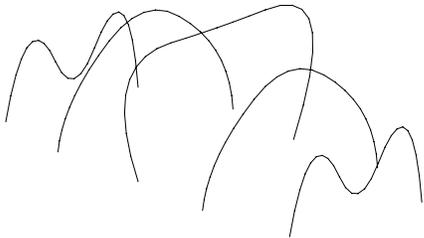


Рисунок 4: Исходные сечения.

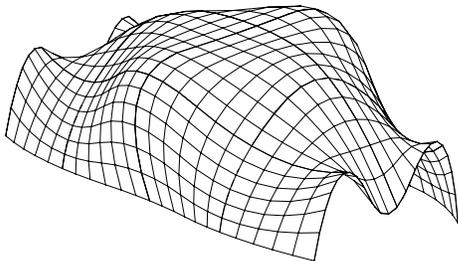


Рисунок 5: Полученная поверхность.

### 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ СУДОВОГО КОРПУСА

Разработанная на основе вышеописанного аппарата моделирования NURBS поверхностей технология проектирования судового корпуса в сочетании с методикой сглаживания поверхностей, базирующегося на методе натянутых сеток (МНС, см. [9]), была использована в период 1998-1999 гг в практике проектирования ряда судов различного класса и назначения по заказам зарубежных проектных фирм и судоверфей Норвегии, Польши и Нидерландов. Ниже, на рисунках 6 и 7, представлены некоторые результаты построения поверхностей по набору аппроксимационных точек, заданных Заказчиком, для двух проектов: морского парома типа UT-722 длиной 110 м и морского ледокола BN282 длиной 78 метров.

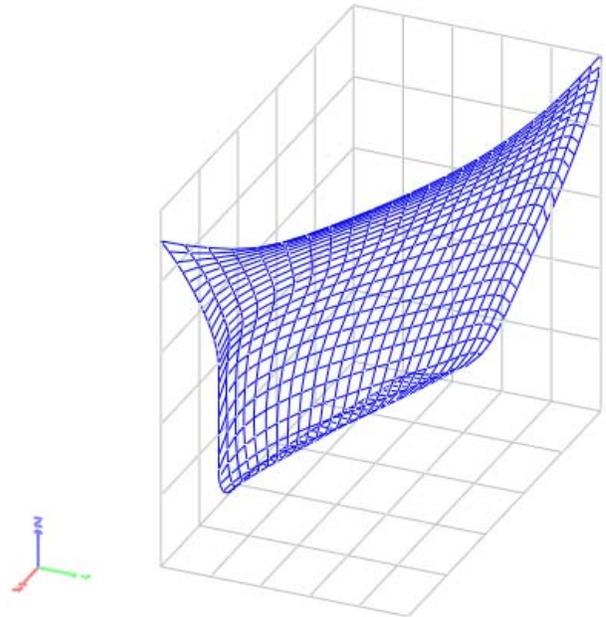


Рисунок 6: Носовая поверхность морского парома UT-722.

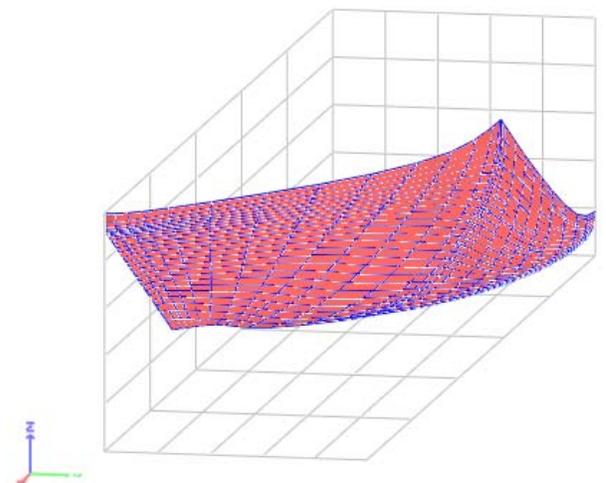


Рисунок 7: Носовая поверхность морского ледокола BN282.

## 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методы и алгоритмы, описанные в статье, были реализованы и используются в системе геометрического моделирования пространственных объектов КЗ. Это позволило соединить достоинства твердотельного моделирования с возможностью моделирования сложных поверхностей, что в свою очередь, расширяет область применения системы КЗ. Так, например, в судостроительных приложениях, где предъявляются высокие требования, как к качеству моделируемых поверхностей, так и к точности и технологичности элементов конструкций судового корпуса, такое сочетание резко повышает эффективность всей системы в целом.

## 5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Фокс А., Прагг М. *Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве*. М.: Мир, 1982. 304с.
- [2] Завьялов Ю. С., Квасов Б. И., Мирошниченко В.Л. *Методы сплайн-функций*. М.: Наука, 1980. 352с.
- [3] W. Tiller. *Rational B-Splines for Curve and Surface Representation. Computer Graphics & Applications, Vol.3, No.10, Sept 1983, pp. 61-69.*
- [4] E.T.Y Lee. *Choosing the Nodes in Parametric Curve Interpolation. Computer-Aided Design, Vol. 21, No.6, July/Aug. 1989, pp. 363-370.*
- [5] L.Piegl. *On NURBS: A Survey. . Computer Graphics & Applications, Vol.1, No.4, January 1991, pp. 55-77.*
- [6] J.H.Wilkinson, C.Reinsch. *Linear Algebra*. М.: Машиностроение, 1976. 390с.
- [7] Митин С.В., Целяев В.В., *Система компьютерного моделирования трехмерных объектов КОМПАС-КЗ. Тезисы международной конференции по компьютерной геометрии и графике "КОГРАФ-96". Н.Новгород, 1996.*
- [8] Оноприйко М.Д., Шубин В.П. *Моделирование кривых сложной формы. Материалы семинара-совещания заведующих кафедр "Начертательная геометрия, инженерная и компьютерная графика". НГАСА., Н.Новгород, 1997, с.81-84.*
- [9] Popov, E.V. *On Some Variation Formulations for Minimum Surface. The Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, vol.20, N 4, 1996.*

## Об авторах

Оноприйко Марина Дмитриевна. НИИ механики при ННГУ.

E-mail: [k3@sandy.ru](mailto:k3@sandy.ru)

Попов Евгений Владимирович, к.т.н., доцент кафедры начертательной геометрии, машинной графики и САПР Нижегородского архитектурно-строительного университета

E-mail: [popov@pop.sci-nnov.ru](mailto:popov@pop.sci-nnov.ru)

## Abstract

The basic techniques of NURBS surfaces creation in 3D computer modeling system  $\{3\}$  are presented in this paper. The advantages of NURBS as a standard means of geometrical design and restoration of surfaces, that well raises the system efficiency on the whole, is demonstrated.