

# Геометрическое Моделирование Тентовых Тканевых Конструкций с помощью Метода Натянутых Сеток

Евгений Владимирович Попов  
Нижегородский архитектурно-строительный университет  
Нижний Новгород, Россия

## Аннотация

:В статье представлены основные положения метода натянутых сеток, проиллюстрировано его эффективность для нахождения формы тентовых тканевых конструкций, оптимальность которых обеспечивается близостью к поверхностям минимальной площади. Продемонстрирована эффективность МНС при построении плоских отображений поверхностей при построении карт раскроя материала. Показана возможность использования МНС совместно с сетями Чебышева

**Ключевые слова:** Метод натянутых сеток, Минимальные поверхности, Сеть Чебышева, Тентовые тканевые конструкции.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, современная концепция проектирования и производства конструкций опирается на использование комплексных систем автоматизированного проектирования (CAD), технологической подготовки производства и проектирования производственных мощностей (CAM) и инженерного анализа (CAE). По оценкам специалистов во всем мире свыше 95% современных предприятий большого, среднего, и более 99% предприятий малого бизнеса, создающие как простые (посуда, мебель, бытовая техника и т.п.), так и очень сложные (автомобили, самолеты, суда) изделия, используют такую схему в своей практике. Вместе с тем, в современной практике существует ряд изделий и сооружений, чрезвычайно трудно поддающихся проектированию и анализу в силу слабой разработанности соответствующего математического аппарата. К таким изделиям относятся тентовые тканевые конструкции, получившие за последние 20 лет широкое распространение. Тентовые тканевые конструкции имеют неоспоримое преимущество при перекрытии больших открытых площадей, предназначенных для размещения торговых центров, выставочных площадей, а также являются идеальным решением для спортивных сооружений, например открытых теннисных кортов, плавательных бассейнов, стадионов. Тентовые тканевые конструкции предпочтительны для сооружения мелких городских, мобильных торговых точек, мини-кафе, мест проведения культурно-массовых мероприятий и пр. Преимущества тентовых тканевых конструкций обусловлены их низкой стоимостью по сравнению, например, с металлоконструкциями, высокой мобильностью и возможностью их производства в цеховых условиях с последующей простой сборкой на месте сооружения. Кроме того, подобные конструкции имеют формы, выглядящие весьма эстетично, в силу того, что состоят из комбинации разнообразных поверхностей двойной кривизны. Однако проектирование подобных конструкций представляет собой чрезвычайно сложную задачу, обычно

требующую решения трех проблем: *определение формы тканевой конструкции, анализ нагружения конструкции и построение карты раскроя конструкции* [1].

Проектирование и анализ тентовых тканевых конструкций существенным образом отличается от проектирования обычных изделий, форма которых обычно известна априори. Форму тентовых тканевых конструкций можно определить только после проведения специфического анализа, требующего привлечения специальных методов и технологий, основанных на исследовании поведения нагруженных мембран, то есть оболочек с нулевой изгибной жесткостью. Существо подобного подхода заключается в подборе фиктивных нагрузок на мембрану, обладающую определенными физико-механическими свойствами, таким образом, чтобы мембрана находилась в равновесии. Среди разработанных технологий, посвященных решению данной проблемы, следует отметить различные формулировки метода конечных элементов (МКЭ) в больших перемещениях, как это описано в [1]. Однако, как отмечается авторами данной работы, единого подхода к решению проблемы определения формы тентовых тканевых конструкций на сегодняшний день не существует. Кроме того, описанные МКЭ подходы приводят к получению чрезвычайно сложных матриц жесткости конечных элементов, а сама задача по нахождению формы конструкции является геометрически нелинейной, требующей сравнительно больших затрат компьютерного времени. В то же время рядом авторов подчеркивалось, что наиболее предпочтительной формой поверхностей для тентовых тканевых конструкций являются поверхности минимальной площади. Это обусловлено рядом причин, среди которых главными являются, во-первых, соображения экономии материала, во-вторых, свойство равномерности натяжения материала по всей площади минимальных поверхностей.

В настоящей работе представлен простой математический аппарат, предназначенный для отыскания формы тентовых тканевых конструкций, близкой к поверхностям минимальной площади с последующим построением карт раскроя полотнища. Аппарат подробно описан в работах [3], [4], [5], [6] и получил название метода натянутых сеток (МНС).

## 2. МЕТОД НАТЯНУТЫХ СЕТОК (МНС)

Геометрический смысл МНС, сформулированный в вышеупомянутых работах, заключается в том, что для любой поверхности, заключенной в жесткий контур суммарное расстояние между произвольными парами точек поверхности стремится к минимально возможному значению. Это позволяет свести решение задачи о минимуме площади поверхности к решению задачи о поиске минимума квадратичной формы, пропорциональной квадрату

суммарной длины всех сегментов сетчатой структуры, аппроксимирующей поверхность, что приводит к чрезвычайно простой итоговой системе линейных алгебраических уравнений.

## 2.1 Обобщенная формулировка МНС

Как показано в работе [5], существует обобщенная формулировка метода МНС, предполагающая наличие внешних воздействий на сетчатую структуру в виде наложенных упругих узловых связей и узловых псевдо-нагрузок, а именно

$$\Pi = \sum_{j=1}^n D_j R_j^2 + \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{k=1}^m C_{ik} (\Delta X_{ik})^2 - \sum_{k=1}^m P_{ik} \Delta X_{ik} \right), \quad (1)$$

где  $n$  - общее число сегментов сетчатой структуры,  
 $m$  - общее число узлов сетчатой структуры,  
 $R_j$  - длина сегмента номер  $j$ ,  
 $D_j$  - весовой коэффициент,  
 $\Delta X_{ik}$  - приращение координаты  $k$ -того узла по оси  $i$ ,  
 $C_{ik}$  - жесткость упругой связи в узле номер  $k$  по оси  $i$ ,  
 $P_{ik}$  - псевдо-нагрузка в узле номер  $k$  по оси  $i$ ,

Выражение (1) после преобразований, аналогичных описанным в [3], [4], позволяет получить систему разрешающих алгебраических уравнений, основным достоинством которой является симметричность и малая заполненность ее матрицы, на главной диагонали которой расположены простые числа, а ненулевые недиагональные компоненты равны -1. Все это позволяет построить чрезвычайно экономичный и достоверный вычислительный подход для решения целого ряда практических проблем.

## 2.2 Нахождение формы минимальных поверхностей

Проблема минимальных поверхностей в классической математике сводится к отысканию такой поверхности в пространстве, ограниченной заданным контуром, в общем случае не являющимся плоским, которая обладает минимальной из всех возможных значений площадью [2]. Как известно, подобным свойством обладают поверхности, имеющие нулевую среднюю кривизну в каждой своей точке, однако доказано, что это условие является необходимым, но недостаточным. Имеется целый ряд поверхностей, обладающих данным свойством, которые, тем не менее, не относятся к классу минимальных, например некоторые седлообразные поверхности.

Следует отметить, что аналитическое решение данной проблемы, в силу ряда причин, весьма затруднено. В настоящее время найдены аналитические решения только для некоторых простых поверхностей, среди которых, например, поверхности катеноидальной, геликоидной формы и некоторые другие. Численному решению проблемы минимальных поверхностей посвящена, например, работа [2], где предложена оригинальная МКЭ формулировка, основанная на минимизации площади искомой поверхности, ограниченной замкнутым контуром, которая позволяла производить верхнюю и нижнюю оценку ее площади в псевдо-стационарном состоянии. Однако все из предлагаемых на сегодняшний день численных формулировок решения проблемы минимальных поверхностей обладают чрезвычайной громоздкостью, что делает их весьма требовательными к компьютерным аппаратным средствам.

В работах [3], [4] описан и обоснован приближенный численный подход к решению проблемы нахождения формы минимальных поверхностей на базе МНС.

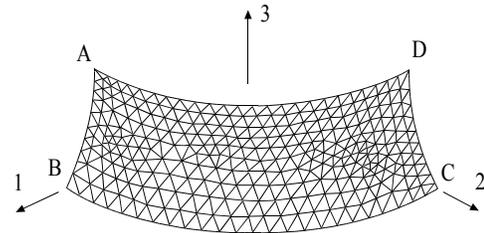


Рисунок 1: Часть поверхности катеноида.

Численное решение задачи осуществляется путем минимизации функционала (1), как это показано в [3], построенного на базе сетчатой структуры, сгенерированной на заданном неплоском контуре. Это позволяет получить три независимые системы линейных алгебраических уравнений относительно приращений координат узлов сетчатой структуры. Следует отметить, что наличие в правой части выражения (1) слагаемых, названных псевдо-нагрузками, позволяет варьировать формой поверхности в широких пределах, по аналогии с выдуванием мыльных пузырей. Подобная процедура будет продемонстрирована ниже в Разделе 3.

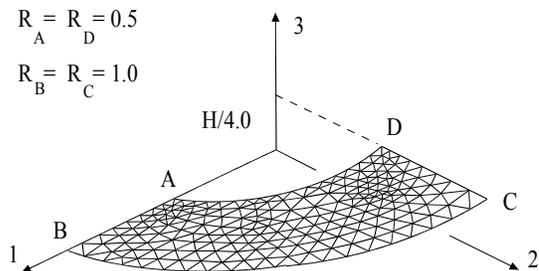


Рисунок 2: Поверхность геликоида.

На рисунках 1 и 2 представлены результаты численных экспериментов по построению двух классических минимальных поверхностей – катеноида и геликоида с использованием МНС. В обоих рассмотренных случаях площадь поверхностей, вычисленная в виде суммы площадей ячеек аппроксимирующей сети, отличалась от аналитической не более, чем на 0.1%.

На рисунке 3 изображена форма тента выставочного мини-павильона, так же найденная с использованием МНС.

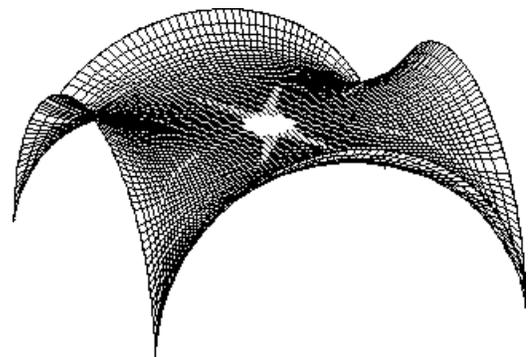


Рисунок 3: Форма тента выставочного мини-павильона.

## 2.3 Построение плоских отображений поверхностей с помощью МНС

Проблема разверток поверхностей является определяющим этапом при построении карт раскроя материала тентовых тканевых конструкций. В соответствии с точкой зрения, изложенной в работе [1], проблема развертки поверхностей подразделяется на две независимые формулировки, а именно: построение развертки линейчатых поверхностей и построения отображения не развертывающихся поверхностей двойкой кривизны на плоскую область, что связано с некоторым деформированием элементов поверхности. Более детальное изучение проблемы показывает, что с геометрической точки зрения обе формулировки не отличаются друг от друга и могут рассматриваться как изометрическое отображение поверхности на плоскую область. Как известно, изометрическое отображение поверхности является одновременно также конформным и экви-ареальным в силу сохранения, как площадей элементарных частей поверхности, так и углов между произвольной парой кривых на поверхности. Отличие заключается только в том, что линейчатые поверхности отображаются без искажения линейных элементов, а поверхности двойкой кривизны могут быть отображены на плоскую область только приближенно.

В работе [4] показано, что условие конформности двух поверхностей, в терминах дифференциальной геометрии, записанное в виде следующего условия

$$\sqrt{I_2} = \lambda \cdot \sqrt{I_1}, \quad (2)$$

где  $\lambda$  - коэффициент искажения линейных элементов поверхности в результате конформного отображения.

позволяет для кусочно-гладкой поверхности вывести следующий функционал, выраженный суммой интегралов вдоль криволинейных сегментов, ограничивающих элементы поверхностей

$$\Pi = D \sum_{j=1}^n \int_{s_j} w_j \cdot (\lambda \cdot \sqrt{I_1} - \sqrt{I_2})^2 ds, \quad (3)$$

где  $n$  - общее число сегментов в аппроксимации,

$w_j$  - весовые коэффициенты,

$\Pi$  - полная невязка отображения

$D$  - произвольная константа, используемая в качестве масштабного коэффициента.

Полагая далее  $w_j \equiv 1$ , функционал (4) можно преобразовать к дискретной форме в виде конечных сумм евклидовых расстояний между узлами сети, аппроксимирующей поверхность

$$\Pi = D \sum_{j=1}^n (\lambda \cdot R_j - L_j)^2, \quad (4)$$

где  $R_j$  - исходная длина сегмента номер  $j$ ,

$L_j$  - конечная длина сегмента номер  $j$ ,

$\lambda$  - коэффициент искажения, близкий к 1 (в общем случае может быть различным для каждого сегмента).

Функционал (4) отличается по форме от функционала (1) только наличием нелинейных компонент, что, как показано в работах [4] и [6], приводит к появлению нелинейных псевдо-нагрузок в правых частях итоговых систем уравнений. Левые же части систем уравнений не отличаются от обычных систем, к которым приводит форма МНС, основанная на выражении (1). Это обстоятельство приводит к необходимости использования итерационных методов решения итоговых систем уравнений. В работах [4] и [6] рассмотрена простая итерационная схема, показавшая хорошую сходимость процесса. В качестве примера на рисунке 4 представлено плоское отображение одной восьмой части поверхности катеноида. Следует отметить, что плоское отображение поверхностей с двойкой кривизной, какой является катеноид, осуществляется с помощью МНС приближенно. Экви-ареальность плоского отображения в данном случае обеспечивается треугольной формой ячеек аппроксимирующей сети. Линейные сегменты сети в результате отображения получают некоторые математические деформации, которые, однако, в данном случае не превышают 0.2%.

## 3. МНС И СЕТИ ЧЕБЫШЕВА

Среди вопросов внутренней геометрии поверхностей представляет большой интерес теория *сетей Чебышева*. В 1878 году П.Л.Чебышев выступил с докладом «О кройке одежды» [7], где высказал положения, имеющие большое практическое и теоретическое значение. При кройке одежды, так же как и при изготовлении матерчатых оболочек для разнообразных изделий, необходимо выполнить плоскую выкройку на ткани, служащей покрытием для криволинейной поверхности, возможно лучше прилегающей к этой поверхности.

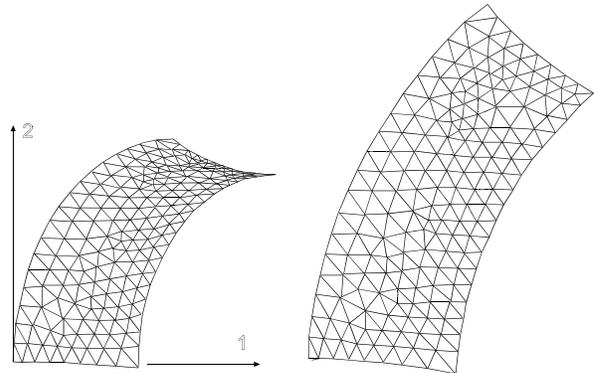


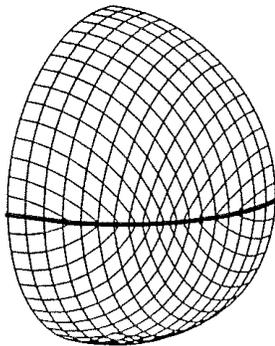
Рисунок 4: Плоское отображение поверхности катеноида.

Чебышевым показано, что в этом случае речь не идет об изгибании поверхности, так как прилегание ткани к поверхности может быть достигнуто не за счет деформаций растяжения нитей переплетения ткани, а за счет деформаций искажения сети переплетения в диагональном направлении. В первом приближении Чебышев считал нити переплетения ткани нерастяжимыми. При «одевании» криволинейной поверхности тканью классического переплетения, то есть состоящей из двух взаимно ортогональных направлений нитей «основы» и «утка», на поверхности образуется криволинейная сеть, что обусловлено изгибанием нитей при сохранении их длины, сетевой же угол при этом изменяется. Эта сеть обладает следующим признаком: две линии,

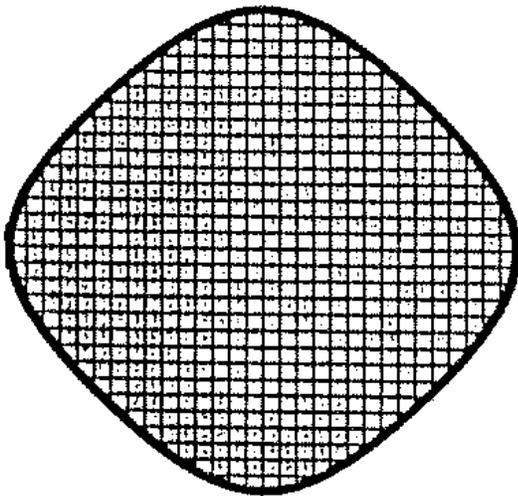
принадлежащие одному семейству нитей, отсекают на любой нити, принадлежащей другому семейству нитей, дуги одной и той же длины. Другими словами, в любом криволинейном четырехугольнике, образованном линиями сети Чебышева, противоположные стороны равны между собой.

На основе вышеперечисленных соображений Чебышевым был предложен математический подход, позволяющий строить плоское отображение четырехугольной сети с сохранением длин сегментов ячеек. Подход основан на разложении в ряд координат чебышевской сети по координатам полугеодезической сети. В качестве примера Чебышевым была продемонстрирована сфера, покрытая двумя сшитыми кусками ткани, каждый из которых покрывал одно из полушарий сферы.

В последующих работах Чебышева, точно так же как и в [7] и в работах многих других авторов, данный пример не был проиллюстрирован более подробно. Авторами работы [8], посвященной теоретическим и практическим вопросам, связанным с восстановлением трехмерной формы тел, покрытых сетью Чебышева, по их двумерным изображениям, был разработан собственный математический подход к решению данной задачи. На рисунках 5 и 6 представлена сеть Чебышева, покрывающая два полушария сферы и ее плоское отображение, полученное в [8].



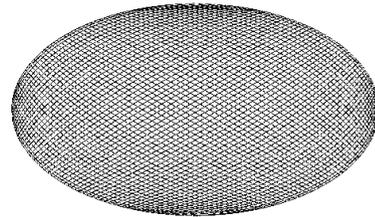
**Рисунок 5:** Четвертая часть сферы, покрытой сетью Чебышева по данным работы [8].



**Рисунок 6:** Плоское отображение сети Чебышева, покрывающей верхнюю полусферу по данным работы [8].

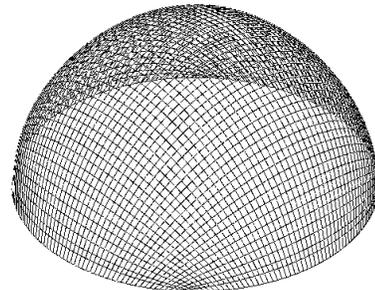
В порядке проверки эффективности построения плоских отображений на базе МНС при сетках, составленных из ячеек различной формы, был проведен численный эксперимент по построению плоского отображения поверхности верхней полусферы с радиусом  $R = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . В этом случае площадь

полусферы равна числу  $\pi$ . Поверхность полусферы была смоделирована следующим образом. Первоначально была построена окружность с радиусом, равным радиусу полусферы (см. рисунок 7). На базе построенной окружности построена плоская NURBS поверхность с параметрическим базисом 80 на 80.



**Рисунок 7:** Исходная окружность для моделирования полусферы.

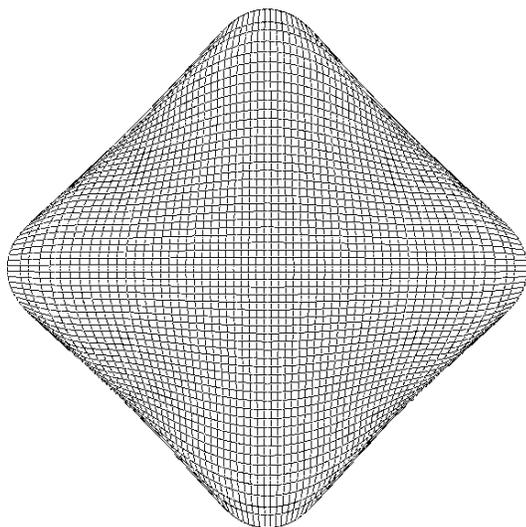
Полученная поверхность была подвергнута «выдуванию» с использованием МНС путем подбора узловых псевдо-нагрузок (м. выражение (1)).



**Figure 8:** NURBS- модель полусферы.

В результате была получена NURBS- модель полусферы, изображенная на рисунке 8, с площадью 3.099678. Отклонение радиуса поверхности в контрольных узлах от точного значения нигде не превышало 0.5%. Следует отметить, что в силу малой изученности вопроса о точном задании псевдо-усилий в МНС, последние подбирались поэтапно, таким образом, чтобы в любой момент нагружения их направление совпадало бы с направлением нормали к поверхности. Полученная NURBS- модель полусферы была подвергнута плоскому отображению с использованием МНС по схеме, описанной выше. При этом были рассмотрены два варианта аппроксимирующей сети полусферы: сеть,

составленная из треугольных ячеек и четырехугольная сеть, линейные сегменты которой совпадают с параметрическими линиями NURBS поверхности. В результате плоского отображения первого варианта сети была получена плоская фигура, близкая к окружности с радиусом  $1,1107207 \pm 0.5\%$ . Это свидетельствует о том, что полученное отображение очень близко к экви-ареальному. Однако, деформации линейных элементов сети при этом близки к 70%, в силу того, что полусфера не является развешивающейся поверхностью. Во втором случае была получена плоская фигура, изображенная на рисунке 9.



**Figure 9:** Плоское МНС отображение NURBS-модели полусферы с использованием четырехугольной сети.

Как видно, плоская четырехугольная фигура со скругленными углами по форме близка к фигуре, полученной в работе [8] и изображенной на рисунке 6. Отличие заключается лишь в форме сторон обеих фигур. Это обусловлено тем, что четырехугольная сеть, использованная при плоском отображении NURBS-модели полусферы, не является сетью Чебышева. Она близка к данному типу сети только в зоне, сосредоточенной в полярной части полусферы. Поэтому сеть, полученная при отображении, в этой зоне близка к регулярной и ортогональной. Кроме того, длины диагоналей фигуры равны 2,1942538 против точных значений 2,2214414, что свидетельствует о достаточно высокой точности МНС отображения в целом.

В результате проведенного численного эксперимента можно сделать вывод о том, что в случае использования для плоского МНС отображения полусферы точной сети Чебышева можно получить сколь угодно точный результат.

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Практическое использование МНС при проектировании тентовых тканевых конструкций показало его высокую эффективность. Простота итоговых систем линейных алгебраических уравнений делает его весьма выгодным с точки зрения компьютерных ресурсов и времени вычислений. В сочетании же с современным аппаратом NURBS аппроксимации поверхностей МНС способен составить конкуренцию известным методам проектирования для некоторых классов конструкций, среди которых находятся не

только уже упомянутые тентовые конструкции, но и парусное оснащение судов.

#### 5. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Tabarrok B., Qin Z.. *Form Finding and Cutting Pattern Generation for Fabric Tension Structures, -Microcomputers in Civil Engineering J., N 8, 1993.*
- [2] Tabarrok B., Xiong Y. *Some Variational Formulations for minimum surface, Acta Mechanica, vol. 89/1-4, 1991..*
- [3] Popov, E.V. *On Some Variation Formulations for Minimum Surface. The Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, vol.20, N 4, 1996.*
- [4] Popov, E.V. *Unfolding problem and cutting pattern generation for tent type structures. The Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering, vol. 22, N 4, 1999.*
- [5] Попов Е.В. *Построение поверхностей минимальной площади с помощью метода натянутых сеток. // Международный межвузовский сб. трудов кафедр графических дисциплин, Вып. 5, Н.Новгород, 2000.*
- [6] Попов Е.В. *Построение разверток поверхностей одинарной и двойной кривизны. // Международный межвузовский сб. трудов кафедр графических дисциплин, Вып. 5, Н.Новгород, 2000.*
- [7] Чебышев П.Л. *О кройке одежды. Полное собрание сочинений. Том V. – М., 1955.*
- [8] Jan Koendrink, Andrea van Doorn. *Shape from Chebyshev Nets. In Computer Vision ECCV'98 5<sup>th</sup> European Conference on Computer Vision, Freiburg, Germany, June 2-6, 1998 Proceedings, Volume II, Springer, 1999*

#### Об авторе

Попов Евгений Владимирович, к.т.н., доцент кафедры начертательной геометрии, машинной графики и САПР Нижегородского архитектурно-строительного университета

E-mail: [popov@pop.sci-nnov.ru](mailto:popov@pop.sci-nnov.ru)

#### Abstract

The basic clauses of the Stretched Grid method (SGM) are presented in this paper. SGM efficiency for fabric tent structures form finding which optimality is provided with affinity to minimal surfaces is illustrated here. The SGM advantages are demonstrated by double-curved surfaces plane mapping at the fabric cutting pattern generation. The SGM and Chebyshev nets relationship is shown.