Конструирование Рациональной Кубики с Несобственной Точкой Возврата.

Фурзиков С.А.
(Московский государственный авиационный институт, г. Москва, Россия)

Рациональную кубику можно получить многими способами [2]. Наиболее простым является конструирование посредством кремоновых преобразований [1, 3]:
- квадратичным преобразованием кривой второго порядка, инцидентной одной фундаментальной точке (F-точке);
- кубическим преобразованием прямой линии [4].

Предпочтение следует отдать квадратичному преобразованию, так как в этом случае задание аппарата преобразования, точнее, его инвариантной кривой и прообраза сводится к построению кривой второго порядка. Задание же кубического преобразования требует предварительного построения инвариантной кривой третьего порядка [1]. То есть для конструирования рациональной кубики сначала надо построить инвариантную рациональную кубику, что, естественно, не упрощает решение поставленной задачи.

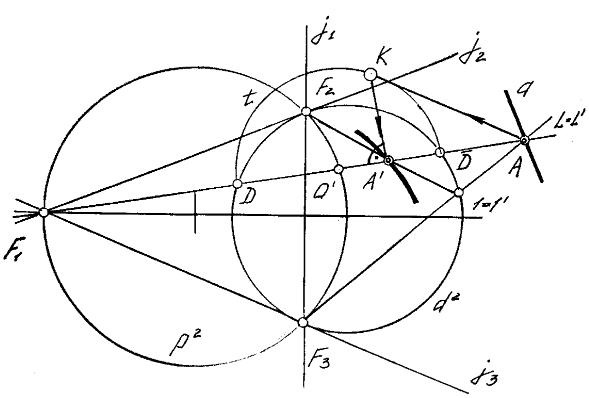

Рис.1.

В качестве квадратичного преобразования используя хорошо изученную в литературе инволюцию Гирста J_2 [1,3,5]. Инволюция J_2 однозначно определяется заданием центра F_1 и инвариантной коники d^2 ([1], стр. 46-49). Она имеет три фундаментальные точки F_1 ,F_2 ,F_3, для которых нарушается однозначность. Этим точкам соответствуют так называемые принципиальные прямые (P-прямые): F_1~j_1, F_2~j_2, F_3~j_3. Здесь j_1 - является полярой [6] точки F_1 относительно инвариантной коники $d^2;F_1,F_2$ - точки пересечения j_1 с d^2 ; $j_2 = F_1 F_2$; $j_3 = F_1 F_3$. (рис. 1.)

Рассматриваемое преобразование является центральным: пары соответственных точек A~ A' колинейны с центром F_1 преобразования, все прямые $l=l'$ пучка (F_1) самосоответственны (слабо инвариантны). Соответственные точки A,A' вместе с точками $D,\bar{D}=AA'nd^2$ образуют гармоническую четверку [6]. Поэтому их построение выполняется просто:
- отмечаются точки $D,\bar{D}$ пересечения прямой F_1A с инвариантной коникой d^2;
- на отрезке $D\bar{D}$ как на диамтре описывается окружность t;
- из точки A проводится к окружности t касательная AK, если точка A находится вне t; восставляется перпендикуляр $A'K$ к F_1A', если данная точка (прообраз) A' находится внутри t;
- из точки касания k опускается перпендикуляр KA' на F_1A (проводится касательная KA до пересечения с F_1A').

Другой, более простой и универсальный способ основан на свойствах этого преобразования:
- данная точка A соединяется прямой линией AF_1 с центром F_1 преобразования и с одной из оставшихся других F-точек, например, F_3;
- отмечается точка $(1=1')=F_3And^2$;
- точка $A'=AF_1nF_21$ будет искомой.

Этот алгоритм основан на том свойстве, что в преобразовании Гирста любой прямой a соответствует кривая второго порядка a', проходящая через все три F-точки F_1, F_2, F_3 (прообраз a пресекает все P-прямые j_1, j_2, j_3, которые отображаются соответственно в F-точки F_1, F_2, F_3, поэтому образ a инцидентен этим F-точкам). Если же прямая инцидентна одной из F-точек, например, AF_3, то ее образ распадается на P-прямую $j_3=F_1F_3$ и собственно образ F_21, где $1=AF_3nd^2$. Таким образом, прямой AF_3 соответствует прямая F_21, а точке A-точка $A'=F_1AnF_21$.

Из приведенных алгоритмов построения соответственных точек A~A' следует, что любой несобственной точке $O^\infty ЄF_1A$ соответствует середина O' отрезка $D_1D=F_1And^2$, множество которых принадлежит предельной конике p^2-образу несобственной прямой u^∞.

В преобразовании Гирста произвольной конике a^2 соответствует рациональная кривая четвертого порядка (квартика) $(a^4)'$, для которой в F-точки F_1, F_2, F_3 являются двойными ([1], стр.62-71). При этом та или иная F-точка для $(a^4)'$ будет узловой, если прообраз a^2 пересекает её в соответственную P-прямую в двух действительных точках, точкой возврата, если a^2 касается соответственной P-прямой, и наконец, изолированной точкой, если a^2 пересекает соответственную P-прямую в мнимых точках.

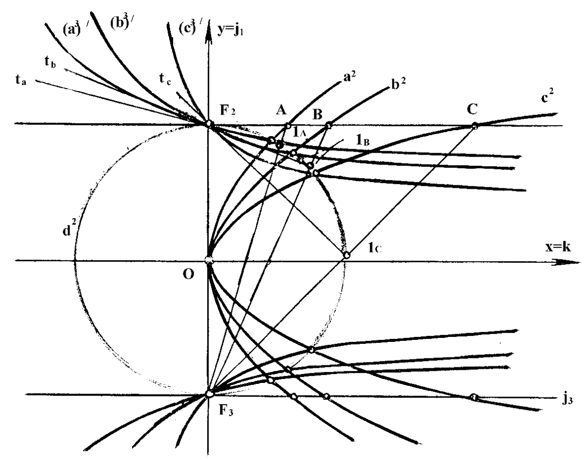

Рис.2.

Образом коники a^2 в преобразовании Гирста будет кривая третьего порядка (кубика) $(a^3)'$, если a^2 инцидентна одной из трех его F-точек. В этом случае образ $(a^4)'$ коники a^2 распадается на соответственную этой F-точке P-прямую и собственно образ - $(a^3)'$. Для получения симметричной кубики $(a^3)'$ будем брать конику a^2, инцидентную центру преобразования F_1 (рис.2.). Так как по условию кубики $(a^3)'$ должна иметь несобственную точку возврата, то используем преобразование Гирста с несобственным центром F_1^∞([1], стр.57-62). Поэтому в качестве прообраза a^2 необходимо взять параболу (она инцидента F_1^∞), касающуюся P-прямой j_1. На рис.1. показаны кубики $(a^3)'$, $(b^3)'$, $(c^3)'$ с несобственной точкой возврата F_1^∞, которые в качестве горизонтальной асимптоты имеют ось Ox, а в качестве вертикальной асимптоты - Oy. Эти кубики относятся к гиперболизмам гиперболы по классификации И. Ньютона [7].

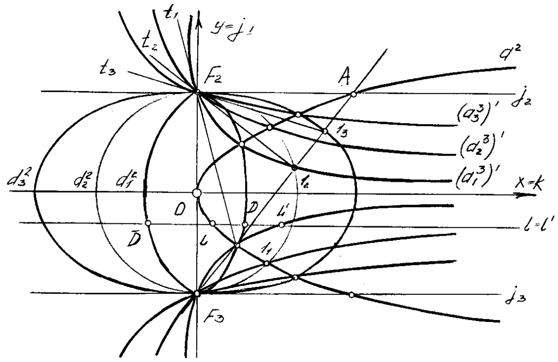

Рис.3.

Их прообразами являются соответственно параболы a^2, b^2, c^2. Изменяя значения параметра параболы можно управлять формой кубик: при уменьшения значения параметра параболы увеличивается искривленность кубики и она более тесно примыкает к своим асимптотам уже в окрестности начала координат.

Есть другая возможность управления формой конструируемой кубики. Для этого в качестве инвариантной коники следует взять эллипс. На рис.3. в качестве инвариантной коники выбраны три эллипса с равными значениями одной оси F_2F_3, но с разными значениями второй оси. Построены образы $(a^3{}_1)'$, $(a^3{}_2)'$, $(a^3{}_3)'$ одной и той же параболы a^2 в этих преобразованиях. Здесь, как и в предыдущем случае, имеется хорошая возможность управления формой конструируемой кубики, точнее, её искривленностью в окрестности начала координат.

Понятие искривленности можно конкретизировать заданием касательной t в фундаментальной точке F_2 или (и) F_3. Из теории центральных кремоновых преобразований известно [1], что хотя все точки принципиальной прямой, например, j_2 отображаются в единственную точку F_2, тем не менее их образы здесь не обезличиваются (см. рис.2 и 3.). Дело в том, что образу $A'=F_2$ любой точки $A\in j_2$ ассоциирована свое конкретное направление $t_a=F_2 1_A$, где 1_A - точка пересечения прямой F_3A с инвариантной коникой d^2. Поэтому образ $(a^3)'$ параболы a^2 в точке F_2 будет иметь фиксированную касательную t_a, ассоциированную с точка A пересечения параболы a^2 с принципиальной прямой $j_2 \sim F_2$.

Следовательно, появляется возможность управления положения ветви кубики заданием касательной в этой F-точке. На рис.2. задание в F_2 касательной, например, t_b определяет положение точки $B\in j_2$, которой инцидентна парабола -прообраз b^2. На рис. 3., когда прообраз a^2 задан и положение точки $A=a^2 \cap j_2$ известно, данная касательная, например, t_2 определяет точку $1_2=t_2 \cap F_3A$, которой инцидентна инвариантная коника $d^2{}_2$. Таким образом, формой конструируемой кубики $(a^3)'$ можно управлять изменением параметра p параболы-прообраза a^2 или изменением величины одной оси инвариантного эллипса d^2. Конкретные процедуры управления будут рассмотрены в следующем разделе.

Завершим этот раздел выводом формул преобразования инволюции J_2, заданной несобственным центром $F_1^\infty \in O_x$ и инвариантным эллипсом d^2 с одной фиксированной осью $F_2F_3=2b$, принадлежащей оси Oy системы отнесения Oxy (рис.3.). Из описанного выше алгоритма преобразования Гирста J_2 следует, что соответственные точки $L(x,y) \sim L'(x',y')$ принадлежат самосоответственной прямой $(l=l') \ni F_1^\infty (l \parallel Ox)$ и делят гармонические точки $D(x_1,y_1)$, $D(x_2,y_2)$ пересечения прямой l с инвариантным элипсом d^2

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1.1)$$

Так как $l \parallel Ox$, то $y=y'=y_1=y_2$. Поэтому гармоническая четверка точек [6]

$$(DDLL')=\frac{(DDL)}{(DDL')}=\frac{DL\cdot DL'}{DL\cdot DL'}=-1$$

в координатной форме запишется так:

$$\frac{(x-x_1)\cdot(x'-x_2)}{(x-x_2)\cdot(x'-x_1)}=-1 \qquad (1.2)$$

Абсциссы x_1,x_2 точек D,D определяются из (1.1):

$$x_{1,2}=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2} \qquad (1.3)$$

Подставив найденные значения $x_{1,2}$ из (1.3) в (1.2), после элементарных выкладок мы имеем:

$$x'=\frac{a^2\cdot(b^2-y^2)}{b^2x} \qquad (1.4)$$

С учетом $y'=y$ имеем формулы преобразования Гирста, в силу инволюционности которого формулы прямого и обратного преобразований симметричны.

Для вывода уравнения конструируемой кубики с несобственной точкой возврата достаточно в уравнение параболы - прообраза

$$(y')^2=2px'$$

подставить значения x' и y' из (1.4). Имеем

$$y^2=\frac{2pa^2\cdot(b^2-y^2)}{b^2x} \qquad (1.5)$$

или после некоторых упрощений

$$y^2(b^2x+2pa^2)-2pa^2b^2=0$$

Исследование уравнения (1.5) подтверждает ранее полученные синтетические свойства конструируемой кубики:

1) при подстановке в (1.5) значения $x=0$ имеем $y=\pm b$ - кубика инцидентна F-точкам F_2,F_3;
2) при подстановке в (1.5) значения $y=0$ имеем $x=\infty$ - кубика в качестве горизонтальной асимптоты имеет ось Ox;
3) при подстановке в (1.5) значения $x=-\dfrac{2pa^2}{b^2}$ имеем $y=\infty$, то есть уравнение вертикальной асимптоты имеет вид

$$x=-\frac{2pa^2}{b^2} \qquad (1.6)$$

Отсюда следует, что при *b=const* вертикальная асимптота приближается к оси *Oy* при уменьшении параметра *p* прообраза и значения полуоси *a* инвариантного эллипса d^2. Так как в (1.6) значение *a* входит в квадрате, то управление формой конструируемой кубики посредством изменения велечины полуоси *a* эллипса d^2 более эффективно по сравнению с изменением значения параметра параболы-прообраза.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей. – М: Машиностроение, 1987. – 192 с.
2. Савельев А.А. Плоские кривые. – М., Физматгиз, 1960, 320 с.
3. Hudson H. Cremona transformations in plane and space. – Cambridge, 1921, - 433 c.
4. Конактаев К.К. Конструирование обводов из дуг уникурсальных циркулярных кривых посредством кремоновых инволюций. Автореферат. – М., МТИПП, 1972, - 21 с.
5. Hirst On the quadric inversion of plane curves, London R.S. Proc., 14., 1865, c. 91-106.
6. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. – М., Просвещение, 1969. – 368 с.
7. Смогоржевский А.С., Столова Е.С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. – М., Физматгиз, 1961, - 264 с.