

# Эффективный метод расчета освещенности с использованием функции распределения вероятности для генерации лучей

Копылов Э.А.

НТВЦ, Институт Прикладной Математики им. М.В.Келдыша РАН  
Москва, Россия

## Аннотация

В работе предложена реализация эффективного метода Монте Карло расчета глобальной освещенности. В отличие от традиционной реализации, метод трассирует лучи не с источников света, а с поверхностей освещенных объектов, трансформируя прямую освещенность в функцию распределения вероятности для генерации вторичных лучей. Используемый подход учитывает пространственное и поверхностное поглощение света пришедшее от каждого источника, в том числе поглощение на текстурированных поверхностях. Предлагаемый метод позволяет достичь такого же уровня точности расчета вторичной освещенности как и традиционный метод, но с значительно меньшим количеством трассируемых лучей, а значит и с выигрышем по времени.

**Ключевые слова:** глобальное освещение, Монте Карло, квази-Монте Карло, карта фотонов, карта освещенности, First Shot.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Базовыми понятиями в задачах расчета глобальной освещенности служит разделение освещения на прямое, имеющее место вследствие падения на поверхность прямого света от источников, и вторичное, создаваемое переотражениями и преломлениями света от других освещенных поверхностей. Модель распространения света, методы вычисления и характер освещения различны для каждой из компонент. Если компонента прямого освещения может быть вычислена аналитически, то для расчета вторичной освещенности используются методы численного интегрирования пригодные для задач с высокой размерностью. Являясь предметом современных исследований в области расчета излучательности [1, 2, 3, 4] метод Монте Карло, чрезвычайно эффективный для многомерного интегрирования, позволяет получить несмещенное решение с наперед заданной точностью, а стохастические алгоритмы на его основе поддерживают перенос световой энергии между поверхностями любых оптических свойств практически не вызывая вычислительной сложности.

Уравнение рендеринга [5] описывает излучательность  $L(\vec{x}, \omega)$  в точке поверхности  $\vec{x}$  по направлению  $\omega$  и имеет рекуррентный вид  $L(\vec{x}, \omega) = L^e(\vec{x}, \omega) + IL(\vec{x}, \omega)$ , где  $L^e$  светимость от источников света, а интегральный оператор  $I$  описывает взаимодействие с поверхностью света пришедшего от других освещенных поверхностей. Идея, положенная в основу стохастического метода решения

уравнения рендеринга, состоит в испускании фотонов в соответствии с физическими законами переноса световой энергии и регистрации взаимодействия фотонов с объектами сцены. Траекторий световых частиц (фотонов) прослеживаются на всех этапах существования, от момента их генерации источниками света и до поглощения или выхода из сцены. Направление, в котором испускается фотон, длина волны и стартовая позиция на источнике света определяются стохастически, с помощью псевдослучайной последовательности чисел, согласно фотометрическому распределению энергии источника и его геометрической форме. Как правило, фотон несет постоянный квант энергии, поэтому сам источник также выбирается случайно, пропорционально мощности излучения света. Траектория фотона трассируется до первого пересечения с поверхностью, после чего дальнейшее поведение фотона определяется свойствами поверхности и генерируемыми псевдослучайными числами. При любой неоднозначности выбора, как то направление диффузного отражения или выбор используемого свойства поверхности из заданной комбинации свойств, используется принцип рулетки. Освещенность поверхности, как и ее излучательность в заданном направлении, реконструируется на основе накопленной информации об зарегистрированных на поверхности фотонах.

## 2. ПРЕДЫДУЩИЕ РАБОТЫ

Стохастические алгоритмы трассировки используют два основных вида структур данных для регистрации фотонов: *карту фотонов* и *карту освещенности*. Концепция фотонных карт, предложенная Йенсенем [6, 7], предполагает сохранение индексов индивидуальных фотонов в сцене в глобальной структуре данных вместе с информацией о направлении и точке пересечения луча с поверхностью. Для вычисления излучательности  $L(\vec{x}, \omega)$  в заданной точке  $\vec{x}$  для направления  $\omega$  необходимо найти  $n$  ближайших фотонов и взять взвешенную сумму вклада каждого фотона в излучательность по направлению  $\omega$ . Поиск фотонов эффективен при использовании сбалансированного  $kD$ -дерева.

Другой подход, получивший название метода *карты освещенности*, состоит в регистрации энергии фотонов на сетке покрывающей грани геометрических примитивов в сцене. Эта концепция была предложена Хекбертом в контексте двунаправленной трассировки лучей с использованием текстур излучательности *Rexes* [8]. В любой момент времени освещенность в  $j$ -элементе сетки карты может быть вычислена как:

$I_j = S_j^{-1} \cdot m_j \cdot \Phi$ , где  $m_j$  – количество фотонов зарегистрированных на  $j$ -элементе,  $\Phi$  – энергия одного фотона,  $S_j$  – площадь  $j$ -элемента сетки. Метод карты освещенности предполагает представление оптических характеристик любой поверхности сцены в виде линейной комбинации диффузных и зеркальных свойств (зеркальное отражение и преломление световых лучей на поверхности рассматриваются в рамках зеркальных свойств). Карта освещенности в этом методе не зависит от точки наблюдения. Конечное изображение формируется на этапе обратной трассировки луча, учитывающем излучательность на видимых зеркальных поверхностях и трансформирующем освещенность диффузных поверхностей, накопленную в карте освещенности, в излучательность по закону Ламберта.

Предельная точность расчета излучательности упомянутыми стохастическими алгоритмами трассировки фотонов с псевдослучайным датчиком чисел зависит погрешности введенных данных и конечной точности представления чисел в компьютере, а скорость сходимости составляет  $O(N^{-1/2})$ . Для ускорения вычислений, в частности, были предложены квази-Монте Карло алгоритмы [9, 10]. В отличие от интеграции Монте Карло с использованием псевдослучайной последовательности, скорость сходимости интегрирования с использованием квазислучайной последовательности зависит от кратности интеграла. Это объясняется увеличением величины невязки квазислучайных последовательностей с ростом числа измерений. При достаточно большом количестве точек  $N$ , невязка Монте Карло интегрирования с  $d$ -мерной квазипоследовательностью оценивается как  $O(N^{-1} \log^d N)$ . Если же количество точек не достаточно велико, невязка больше и практически равна невязке псевдослучайной последовательности, т.е.  $O(N^{-1/2})$  [11].

Скорость сходимости численного Монте Карло интегрирования с использованием как псевдо- так и квази-последовательности также зависит от гладкости интегрируемой функции. Наибольший вклад в нарушение гладкости вносит компонента прямого освещения (резкие тени, высокий градиент освещенности), а в еще большей степени – прямое освещение точечными источниками света. Вычисление прямого освещения не представляет сложности, поэтому логичным шагом представляется исключение точечных источников из стохастического алгоритма вообще. В работах [12, 13, 14] предлагается метод замены точечных источников (“*first-shot*” method). Суть его в следующем: рассмотрим искомую излучательность в виде  $L = L^{ep} + L^{np}$ , где  $L^{ep}$  - светимость точечных (или близких к точечным) источников света, вычисляемая аналитически, а  $L^{np}$  - светимость площадных источников вместе с излучательностью полученной от вторичного освещения. Из уравнения рендеринга получим:

$$L = L^{ep} + L^{np} = L^e + I(L^{ep} + L^{np}).$$

Заменяя светимость точечных источников на светимость элементов сетки поверхностей ими освещенных ( $IL^{ep}$ ) получим новый набор источников света:  $L^e = L^e - L^{ep} + IL^{ep}$ . Таким образом, численное интегрирование применяется для модифицированной задачи вычисления  $L^{np} = L^e + IL^{np}$  с более гладкой интегрируемой функцией. Как указано в [12], для диффузных поверхностей хранение  $IL^{ep}$  требует одного

числа на элемент сетки. На практике, однако, существуют поверхности со свойствами отличными от диффузных, а для них  $IL^{ep}$  уже является функцией зависящей от направления. В работе [12] предлагается хранить освещенность полученную каждым элементом сетки от каждого точечного источника отдельно, тогда искомая  $IL^{ep}$  будет вычислена на основе хранимых данных “по требованию” для заданного направления.

### 3. ОПТИМИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА

Заметим, что часть фотонов равномерно распределенных по направлениям вокруг источника света в стохастическом алгоритме трассировки не попадает на поверхности сцены вообще, а часть вносит вклад в прямое освещение которое может быть более эффективно вычислено аналитическими методами. Такие фотоны назовем несущественными для метода вычисления. Помимо издержек связанных непосредственно с их трассировкой, источник неэффективности

численного интегрирования методом Монте Карло связан с отсутствием гладкости подынтегральной функции для точечных источников, а также неоптимальным использованием генерируемых случайных чисел из квази-последовательности (для квази-Монте Карло метода), что, как известно, отрицательно влияет на скорость сходимости.

В настоящей работе предлагается реализация стохастического алгоритма трассировки фотонов в которой каждый фотон является существенным для вычисления. Принципиальным моментом в настоящей работе является кусочно-линейное представление прямой освещенности. Алгоритм является двух шаговым.

На первом шаге аналитически вычисляется прямая освещенность от точечных источников света (конический и параллельный источник света - частный случай точечного источника) в узлах сетки. Для каждого источника света используется отдельная таблица значений и свое адаптивное разбиение для тех элементов сетки, внутри которых вычисленная освещенность меняется нелинейно. В дальнейшем будем рассматривать только треугольные элементы сетки. Адаптивное разбиение проводится рекурсивно на два, три, или четыре треугольника, а критерием разбиения треугольника служит линейность аппроксимации прямого освещения на его поверхности. Как нетрудно заметить, этот критерий в том числе разбивает треугольники по границам тени. Алгоритм показанный ниже рекурсивно проводит адаптивное разбиение без избыточного образования тупых треугольников.

---

Алгоритм 1. Рекурсивная функция для адаптивного разбиения треугольника  $\Delta ABC$

---

```

if (размер треугольника ниже порогового)
    return;
D := GetCenter(A,B,C);
ld = GetIlluminance(D);
la = GetIlluminance(A);
lb = GetIlluminance(B);
lc = GetIlluminance(C);

```

```

lm = (la + lb + lc) / 3;
if (ld == lm)
    return; // освещенность линейно распределена
// треугольник ABC будет разбит
if (в треугольнике ABC нет тупого угла) {
    Разбить ABC на ABD, BCD, CAD;
    return;
}
Пусть ∠A > 90°, тогда [B,C] – самое длинное ребро ABC;
E = GetCenter(B, C);
le = GetIlluminance(E);
if (|le - (lb + lc) / 2| > |ld - lm| && |ld - (la + le) / 2| > |ld - lm|) {
    // максимальный градиент освещения на одном из ребер ABC
    Разбить ABC на AFG, BEF, CGE, FEG
    Где F = GetCenter(A, B), G = GetCenter(A, C);
}
else
    Разбить ABC на ABE, AEC;

```

Ключевым моментом в предлагаемом алгоритме является то, что на этапе построения функции распределения вероятности для выбора пары треугольник-источник, мы можем учесть возможное поглощение света и свести к минимуму вероятность возникновения поглощения при генерации события, а следовательно, метод не тратит время на трассировку лучей которые заведомо будут поглощены еще до учета их вклада во вторичное освещение. С учетом поглощения световой энергии  $K_a$  на треугольнике, для каждой пары треугольник-источник вычисляется коэффициент эмиссии:  $E(m, n) = K_a * S_m * I(m, n)$ , где  $S_m$  – площадь треугольника  $m$ ,  $I(m, n)$  – освещенность на треугольнике  $m$  создаваемая источником света  $n$ . В случае текстурованных треугольников в зависимости от количества текстел покрывающих треугольник используется либо общий коэффициент поглощения для текстуры (поглощение вычисленное для самого яркого текстеля), либо производится сканирование покрывающих текстел с целью определить коэффициент поглощения более точно.

На втором шаге выполняется трассировка фотонов методом Монте Карло. Случайно выбранный треугольник в паре с источником света его освещающим порождают световой луч, стартовая позиция которого выбирается случайно в соответствии с билинейно меняющимся освещением на поверхности. Выбор пары треугольник-источник проходит в соответствии с функцией распределения вероятности построенной пропорционально коэффициенту эмиссии  $E(m, n)$ . При этом те источники света для которых аналитическое вычисление коэффициента эмиссии не проводилось (т.е. площадные источники света) входят отдельными элементами в общую функцию распределения вероятности пропорционально своей мощности. В случае не диффузной поверхности для выбора направления фотона используется информация о направлении с которого треугольник освещается.

## Алгоритм 2. Генерация позиции фотона на треугольнике $P_0P_1P_2$

Предположим освещение (излучательность) билинейно интерполируется между узлами треугольной сетки. Рассмотрим треугольник сетки с вершинами  $P_0, P_1, P_2$  и вычисленными на них значениями освещения  $A, B, C$  соответственно (Рис. 1).

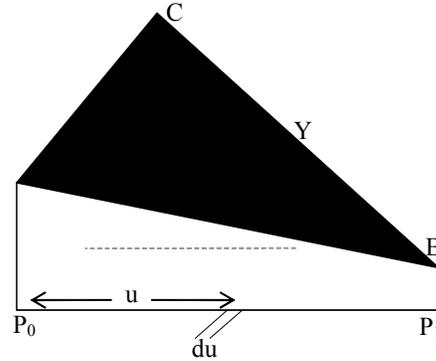


Рис. 1.

Точки треугольника  $P_0P_1P_2$ , например, могут быть параметризованы следующим образом:

$$p = P_0 + u(P_1 - P_0) + v(P_2 - P_0), \text{ где } u \in [0,1], v \in [0,1]$$

Ниже приведено вычисление случайных величин  $u$  и  $v$  для освещения билинейно распределенной на треугольнике  $P_0P_1P_2$ .

Рассмотрим бесконечно малое сечение пирамиды  $P_0P_1P_2ABC$  в произвольной точке  $u$  выбранной на  $P_0P_1$ .  $X = A(1-u) + Bu$  и  $Y = C(1-u) + Bu$  суть значения интерполяции освещения в граничных точках сечения. Выберем функцию плотности вероятности (PDF)  $\rho(u)$  для освещения пропорционально объему сечения:

$$\rho(u)du \sim dV = \frac{X+Y}{2}(P_2 - P_0)(1-u)du$$

$$\rho(u)du = k(X+Y)(1-u)du$$

Подставляя известные значения для  $X$  и  $Y$ , и выполняя требование нормализации для PDF получаем:

$$k \int_0^1 (A+C+2Bu-Au-Cu)(1-u)du = 1$$

$$k \int_0^1 (Au^2 + Cu^2 - 2Bu^2 + 2Bu - 2Au - 2Cu + A + C)du = 1$$

$$k \int_0^1 ((A+C-2B)u^2 - 2(A+C-B)u + A+C)du = 1$$

$$k \left[ \frac{u^3}{3}(A+C-2B) - u^2(A+C-B) + u(A+C) \right]_0^1 = 1$$

$$\frac{k}{3}(A+C-2B) + B = 1$$

$$k = \frac{3}{A+C+B}$$

Таким образом,

$$\rho(u) = \frac{3}{A+C+B}(1-u)(A+C+2Bu-Au-Cu)$$

Интегрируя функцию плотности вероятности  $\rho(u)$  получим функцию распределения вероятности  $P(u)$ :

$$P(u) = \int_0^u \rho(\xi) d\xi = \frac{3}{A+B+C} \int_0^u (1-\xi)(A+C+2B\xi-A\xi-C\xi) d\xi$$

$$P(u) = \frac{3}{A+B+C} \int_0^u (\xi^2(A+C-2B) - 2\xi(A+C-B) + A+C) d\xi$$

$$P(u) = \frac{3}{A+B+C} \left[ \frac{\xi^3}{3} (A+C-2B) - \xi^2 (A+C-B) + \xi(A+C) \right]_0^u$$

$$P(u) = \frac{u^3(A+C-2B) - 3u^2(A+C-B) + 3u(A+C)}{A+B+C}$$

Обращая функцию распределения относительно равномерно распределенной случайной величины  $\alpha = U_{[0,1]}$ , получим:

$$\alpha = P(u)$$

$$u^3(A+C-2B) - 3u^2(A+C-B) + 3u(A+C) - \alpha(A+B+C) = 0$$

или

$$u^3(S-3B) - 3u^2(S-2B) + 3u(S-B) - \alpha S = 0, \text{ где } S = A+B+C.$$

Решение кубического уравнения, например *методом Кардано*, выбранное в полуинтервале  $[0, 1)$ , дает значение параметра  $u$ , параметр  $v$  генерируется с линейным распределением для соответствующего сечения.

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Метод расчета освещенности с использованием функции распределения вероятности для генерации лучей был применен для стохастического алгоритма трассировки фотонов методом Монте Карло с использованием квазислучайной последовательности чисел. Изображения (Рис. 2,3) были построены обратной трассировкой луча с использованием карт освещенности.

Построение функции распределения вероятности для выбора пар треугольник-источник вместе с расчетом коэффициентов эмиссии для тестовой сцены на Рис. 2 составило 2.3 секунды, продолжительность трассировки фотонов методом Монте Карло – 18.6 секунды. Оценка погрешности метода составила 5%. Количество трассируемых фотонов – 1310720, количество регистрируемых пересечений – 3219274. Для той же оценки погрешности, классический метод трассировал 3407872 фотонов с 5132864 зарегистрированными пересечениями за 34 секунды. Следует заметить, время на расчет коэффициентов эмиссии и построение функции распределения вероятности было затрачено немногим более чем требуется для вычисления прямого освещения

аналитическим методом. Для сцены изображенной на Рис. 2 разбиение треугольной сетки было достаточно мелким – не более 1% от размера сцены.



Рис. 2. В сцене 9 источников света и 64499 треугольников. Левая картинка – оптимизированный алгоритм, правая – классический.

Для тестовой сцены на Рис. 3 построение функции распределения вероятности для выбора пар треугольник-источник вместе с расчетом коэффициентов эмиссии для тестовой сцены на Рис. 2 составило 79 секунд, что в 2.77 раза больше времени вычисления прямого освещения аналитическим методом (28.5 секунд). Однако выигрыш на трассировке фотонов составил 3.25 раза. Замедление в вычислении коэффициентов эмиссии вызвано адаптивным делением крупных треугольников в сцене.



Рис. 3. В сцене 9 источников света и 224921 треугольников. Левая картинка – оптимизированный алгоритм, правая – классический.

Как показывают тестовые сцены, оптимизированный алгоритм несет издержки на фазе построения функции распределения вероятности в сценах с крупными треугольниками. Однако издержки окупаются эффективной трассировкой фотонов на этапе вычисления глобальной освещенности.

Эффективная реализация “first-shot” метода расчета глобальной освещенности с использованием адаптивного вычисления прямого освещения с билинейной интерполяцией на треугольной сетке позволяет достичь значительного выигрыша по времени без ущерба точности моделирования.

## 5. ЛИТЕРАТУРА

[1] S.N.Pattanaik, S.P.Mudur. *Computation of global illumination by monte carlo simulation of the particle model of light. Third Eurographics Workshop on Rendering, pages 71-83, May 1992.*

[2] P.Shirley, B.Wade, P.Hubbard, D.Zareski, B.Walter, D.P.Greenberg. *Global illumination via density estimation. In P.Hanrahan and W.Purgathofer, editors, Rendering*

*Techniques'95*, pages 219-230. *Eurographics*, Springer-Verlag, June 1995.

[3] L.Neumann, W.Purgathofer, R.F.Tobler, A.Neumann, P.Elias, M.Feda, X.Pueyo. *The stochastic ray method for radiosity*. In P.Hanrahan and W.Purgathofer, editors, *Rendering Techniques'95*, pages 206-218. *Eurographics*, Springer-Verlag, June 1995.

[4] M.Feda. *A Monte Carlo approach for Galerkin radiosity*. *The Visual Computer*, 12(8):390-405, 1996. ISSN 0178-2789.

[5] J.T.Kajiya. *The rendering equation*. In *Computer Graphics (SIGGRAPH'86 Proceedings)*, pages 143-150, 1986.

[6] H.W.Jensen. *Global illumination using photon maps*. In X.Pueyo and P.Shroder, editors, *Eurographics Rendering Workshop 1996*, pages 21-30, New York City, NY, June 1996. *Eurographics*, Springer Wien. ISBN 3-211-82883-4.

[7] H.W.Jensen. *Rendering caustics on non-lambertian surfaces*. *Computer Graphics Forum*, 16(1):57-64, 1997. ISSN 0167-7055.

[8] P.S.Heckbert. *Adaptive radiosity textures for bidirectional ray tracing*. *Computer Graphics (SIGGRAPH'90 Proceedings)*, volume 24, pages 145-154, August 1990.

[9] S.Heirich, A.Keller. *Quasi-Monte Carlo Methods in Computer Graphics Part II: The Radiance Equation*. *Technical Report 243/94*, 1994.

[10] L.Szirmay-Karlos. *Monte-carlo methods in global illumination*. *Institute of Computer Graphics, Vienna University of Technology*, 1999.

[11] W.Morokoff, R.E.Caflisch. *Quasi-random sequences and their discrepancies*. *SIAM J.Sci.Stat.Computing*, 1995.

[12] L.Szirmay-Karlos, W.Purrathofer. *Global ray-bundle tracing with hardware acceleration*. In *Rendering Techniques'98*, pages 247-258. 1998.

[13] M.Sbert, X.Pueyo, L.Neumann, W.Purrathofer. *Global multipath Monte Carlo algorithms for radiosity*. *Visual Computer*, pages 47-61, 1996.

[14] F.Castro, R.Martinez, M.Sbert. *Quasi Monte-Carlo and extended first-shot improvements to the multi-path method*. In *Spring Conference on Computer Graphics'98*, pages 91-102, 1998.