

# Компьютерно-графическое моделирование кинематических линейчатых поверхностей на основе качения конуса по торсу

Галина Рачковская, Юрий Харабаев  
Ростовский государственный университет, Ростов-на-Дону, Россия

## РЕФЕРАТ

На основе конических преобразований торсовых поверхностей разработана *общая* математическая модель и реализован компьютерно-графический алгоритм построения кинематических линейчатых поверхностей, образованных вследствие качения конической поверхности, заданной *произвольной* выпуклой кривой в качестве её направляющей, по торсовой поверхности, заданной *произвольной* пространственной кривой в качестве её ребра возврата.

Разработанная математическая и компьютерно-графическая модель состоит из следующих основных элементов.

## 1. НЕКЛАССИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КАЧЕНИЯ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

Качение линейчатых поверхностей друг по другу рассматривается в рамках неклассического представления о качении линейчатых поверхностей [1, 2], как упорядоченная последовательность переходов в ряду дискретных состояний системы двух взаимодействующих между собой линейчатых поверхностей, связанных единой текущей общей для двух линейчатых поверхностей образующей.

Причем, представление о дискретности состояний системы двух взаимодействующих линейчатых поверхностей непосредственно вытекает из определения категории «линейчатая поверхность».

В процессе качения линейчатых поверхностей друг по другу каждой образующей одной поверхности ставится в соответствие определенное положение второй линейчатой поверхности относительно первой, что характеризует соответствующее состояние данной системы двух взаимодействующих линейчатых поверхностей.

Только в рамках неклассического представления качения линейчатых поверхностей друг по другу стали возможными механическая интерпретация и геометрическое моделирование качения конической поверхности по торсовой поверхности.

## 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КАЧЕНИЯ КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПО ТОРСОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ.

Качение конической поверхности по торсовой поверхности может быть смоделировано в виде суперпозиции двух согласованных между собой движений – поступательного движения вершины конуса на величину  $ds$  вдоль ребра возврата торса (кривая  $f$ ) и соответствующего этому перемещению вершины конуса вращательного движения конуса вокруг своей оси на угол  $d\varphi$  (рис. 1).

Эта согласованность движений определяется в соответствии с моделью качения конуса постоянной геометрии [1, 2] следующим уравнением:

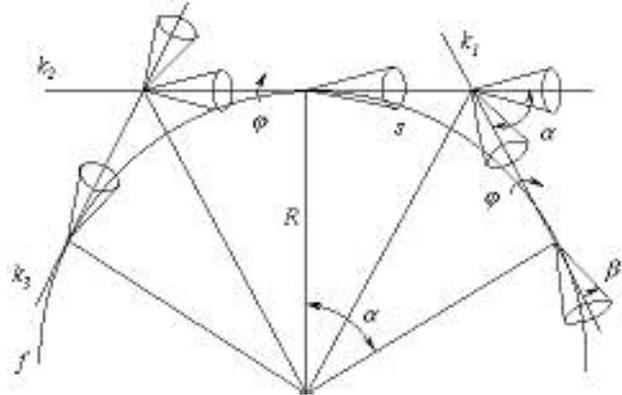


Рис. 1.

$$d\varphi = \frac{1}{R \sin \beta} ds, \quad \varphi = \int_0^s \frac{1}{R \sin \beta} ds, \text{ где}$$

$R$  - радиус кривизны ребра возврата торса (кривой  $f$ ),  
 $\beta$  - угол между образующей и осью конуса.

Решение этого уравнения путем интегрирования на конечных участках с учетом возможной вариации параметров исходных торсовых и конических поверхностей является основой для получения разнообразных кинематических линейчатых поверхностей, образованных вследствие качения конической поверхности по торсовой поверхности.

## 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ РАЗРАБОТКА КОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТОРСОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ (СЛУЧАЙ КАЧЕНИЯ ПРЯМОГО КРУГОВОГО КОНУСА).

Аналитическая разработка конических преобразований торсовых поверхностей потребовала введения, кроме основной системы координат  $oxyz$  (правая декартова прямоугольная система координат), в которой задана кривая ребра возврата  $f$  (параметрически:  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $z=z(t)$ ), также и вспомогательной подвижной системы координат  $OXYZ$  (рис. 2), начало которой помещено в вершине движущегося конуса, а направления осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  заданы с помощью сопутствующего трехгранника  $tnb$ , связанного с пространственной кривой  $f$  ( $t$  – касательная,  $n$  – главная нормаль,  $b$  – бинормаль).

Ось  $OX$  направлена по главной нормали  $n$  к кривой  $f$  в точке  $O$  (вершина конуса).

Направление оси  $OZ$  выбрано под углом  $\beta$  к касательной к кривой  $f$  в точке  $O$  так, что ось  $OZ$  совпадает с осью конуса.

Направление оси  $OY$  определено выбором правой декартовой прямоугольной системы координат  $OXYZ$ .

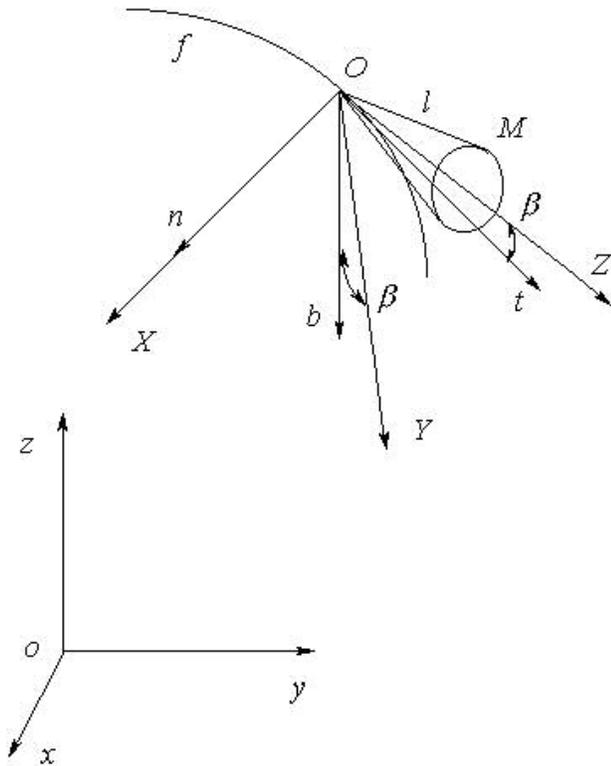


Рис. 2.

В результате конических преобразований торсовой поверхности для случая качения прямого кругового конуса уравнение кинематической кривой  $f_M(x_M(t), y_M(t), z_M(t))$ , описывающей в системе координат  $oxyz$  траекторию движения произвольной точки  $M$ , зафиксированной на поверхности конуса (на произвольном расстоянии  $l$  от вершины конуса), имеет вид:

$$x_M(t) = x(t) + X_x X_M + Y_x Y_M + Z_x Z_M$$

$$y_M(t) = y(t) + X_y X_M + Y_y Y_M + Z_y Z_M$$

$$z_M(t) = z(t) + X_z X_M + Y_z Y_M + Z_z Z_M, \text{ где}$$

$x(t), y(t), z(t)$  – координаты вершины конуса (точки  $O$ ) в системе  $oxyz$ ;

$X_x, Y_x, Z_x, X_y, Y_y, Z_y, X_z, Y_z, Z_z$  – направляющие косинусы осей  $OX, OY, OZ$  в системе  $oxyz$  [3]:

$$X_x = \frac{x''}{k_2}; \quad Y_x = \frac{y'z'' - z'y''}{k_1 k_2} \cos \beta - \frac{x'}{k_1} \sin \beta;$$

$$Z_x = \frac{x'}{k_1} \cos \beta + \frac{y'z'' - z'y''}{k_1 k_2} \sin \beta;$$

$$X_y = \frac{y''}{k_2}; \quad Y_y = \frac{y'z'' - z'y''}{k_1 k_2} \cos \beta - \frac{y'}{k_1} \sin \beta;$$

$$Z_y = \frac{y'}{k_1} \cos \beta + \frac{z'x'' - x'z''}{k_1 k_2} \sin \beta;$$

$$X_z = \frac{z''}{k_2}; \quad Y_z = \frac{x'y'' - y'x''}{k_1 k_2} \cos \beta - \frac{z'}{k_1} \sin \beta;$$

$$Z_z = \frac{z'}{k_1} \cos \beta + \frac{x'y'' - y'x''}{k_1 k_2} \sin \beta;$$

$x', y', z'$  и  $x'', y'', z''$  – соответственно первые и вторые производные функций  $x(t), y(t), z(t)$  по параметру  $t$ ;

$$k_1 = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2};$$

$$k_2 = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2};$$

$X_M, Y_M, Z_M$  – координаты вращающейся точки  $M$  в системе  $OXYZ$ :

$$X_M = l \sin \beta \cos(\varphi + \varphi_0);$$

$$Y_M = l \sin \beta \sin(\varphi + \varphi_0);$$

$$Z_M = l \cos \beta;$$

$\varphi$  – угол поворота конуса вокруг своей оси в системе  $OXYZ$  определяется путём интегрирования на конечных участках пути при решении основного уравнения, обеспечивающего согласованность между собой двух движений – поступательного движения вершины конуса вдоль ребра возврата торса (кривой  $f$ ) и вращательного движения конуса вокруг своей оси:

$$\varphi = \int_0^s \frac{1}{R \sin \beta} ds = \int_0^t \frac{k_1}{R \sin \beta} dt, \text{ где}$$

$R$  – радиус кривизны кривой  $f$  [4]:

$$R = \frac{\sqrt{((x')^2 + (y')^2 + (z')^2)^3}}{\sqrt{(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2}};$$

$$\varphi_0 = \varphi(t = 0).$$

По полученной кинематической кривой  $f_M(t)$  и исходной кривой ребра возврата  $f(t)$  может быть построена линейчатая кинематическая поверхность, как совокупность отрезков прямых, соединяющих соответствующие точки  $O$  и  $M$  на кривых  $f(t)$  и  $f_M(t)$  для каждого значения параметра  $t$ , что отражает движение какой либо выделенной образующей  $OM$  прямого кругового конуса при его качении по торсовой поверхности [3].

#### 4. ОБЩАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОСТРОЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ЛИНЕЙЧАТЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ КОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТОРСОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

На следующем этапе развития компьютерно-графической модели построения кинематических поверхностей, как результата конических преобразований торсовых поверхностей, разработана общая математическая модель, включающая в рассмотрение как произвольную кривую ребра возврата торсовой поверхности - кривую  $f$  (кривая  $f$  задана параметрически:  $x=x(t)$ ,  $y=y(t)$ ,  $z=z(t)$ ), так и произвольную коническую поверхность, заданную произвольной выпуклой кривой  $F$  в качестве направляющей конической поверхности (кривая  $F$  также, как и кривая  $f$  задана параметрически:  $X=X(p)$ ,  $Y=Y(p)$ ,  $Z=Z(p)$ ).

Следует подчеркнуть, что построение этой общей математической модели кинематики линейчатых поверхностей на основе конических преобразований торсовых поверхностей потребовало при её компьютерно-графической реализации перехода к численным методам дифференцирования и интегрирования.

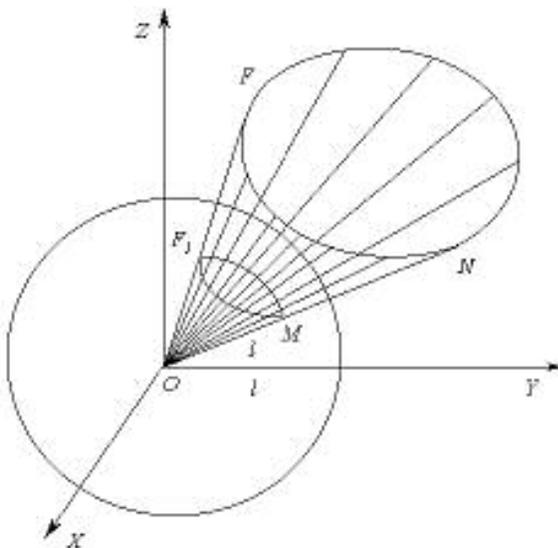


Рис. 3.

При построении общей математической модели проводится переопределение произвольной конической поверхности с помощью вспомогательной сферической направляющей - кривой  $F_1$ , точки которой лежат на пересечении выбранной произвольной конической поверхности и сферы с центром в вершине конуса  $O$  и произвольного радиуса  $l$  (рис. 3), т.е. точки вспомогательной сферической направляющей (кривой  $F_1$ ) равноудалены от вершины конуса  $O$  на расстояние  $l$ . Кривая  $F_1$  также, как и кривая  $F$  задана параметрически:  $X=X_1(p)$ ,  $Y=Y_1(p)$ ,  $Z=Z_1(p)$ .

Произвольная образующая выбранной конической поверхности определяется вершиной конуса - точкой  $O$  и произвольной точкой  $N$  на исходной направляющей конуса - кривой  $F$  (рис.3). Эта же образующая конической поверхности может быть переопределена с помощью той же

точки  $O$  и точки  $M$ , лежащей на пересечении образующей  $ON$  и вспомогательной сферической направляющей  $F_1$  (рис. 3). Если  $X(p)$ ,  $Y(p)$ ,  $Z(p)$  - текущие координаты произвольной точки  $N$  на исходной направляющей (кривой  $F$ ), то текущие координаты соответствующей точки  $M$  на вспомогательной сферической направляющей (кривой  $F_1$ ) определяются следующими соотношениями [5]:

$$X_M = X_1(p) = \frac{lX(p)}{\sqrt{X^2(p) + Y^2(p) + Z^2(p)}} ;$$

$$Y_M = Y_1(p) = \frac{lY(p)}{\sqrt{X^2(p) + Y^2(p) + Z^2(p)}} ;$$

$$Z_M = Z_1(p) = \frac{lZ(p)}{\sqrt{X^2(p) + Y^2(p) + Z^2(p)}} .$$

Для получения кинематической поверхности, как следствия движения выделенной образующей конуса  $OM$  при качении конуса по торсу в общей математической модели вводится вспомогательная подвижная система координат  $OXYZ$ , связанная с ребром возврата торса (кривой  $f$ ), точно так же, как и в рассмотренной выше модели качения прямого кругового конуса.

В общей математической модели использованы те же выражения для направляющих косинусов, которые были получены выше для перехода из вспомогательной подвижной системы координат  $OXYZ$  в основную систему координат  $oxuz$  в модели качения прямого кругового конуса. Однако, следует отметить, что в разрабатываемой общей математической модели величина угла  $\beta$  между образующей и осью конуса, входящая в выражения для направляющих косинусов, в отличие от рассмотренного выше случая качения прямого кругового конуса, является величиной переменной при качении конуса, т.е.  $\beta = \beta(p)$  и текущее значение угла  $\beta$  определяется из следующего соотношения:

$$\sin \beta = \frac{R_1(p)}{l} , \text{ где}$$

$R_1$  - радиус кривизны вспомогательной сферической направляющей конуса - кривой  $F_1$ :

$$R_1 = \frac{\sqrt{((X_1')^2 + (Y_1')^2 + (Z_1')^2)^3}}{\sqrt{(Y_1'Z_1'' - Z_1'Y_1'')^2 + (Z_1'X_1'' - X_1'Z_1'')^2 + (X_1'Y_1'' - Y_1'X_1'')^2}}$$

( $X_1'$ ,  $Y_1'$ ,  $Z_1'$  и  $X_1''$ ,  $Y_1''$ ,  $Z_1''$  - первые и вторые производные функций  $X_1(p)$ ,  $Y_1(p)$ ,  $Z_1(p)$ ).

Кроме того, следует подчеркнуть, что в общей математической модели для нахождения уравнения кинематической кривой  $f_M(x_M(t), y_M(t), z_M(t))$  и, соответственно, кинематической линейчатой поверхности, как следствия движения выделенной образующей конуса ( $OM$ ) при качении конуса по торсу, необходимо для каждого заданного значения параметра  $t$ , определяющего координаты точки  $O$  в системе  $oxuz$ , найти соответствующее значение параметра  $p$ , определяющего координаты точки  $M$  в системе  $OXYZ$  и текущее значение угла  $\beta(p)$ , что позволяет, в конечном счете,

рассчитать направляющие косинусы и на их основе координаты точки  $M$  в системе  $oxuz$  для каждого значения  $t$ . Величина параметра  $p$ , соответствующая заданному значению параметра  $t$ , может быть найдена в результате решения основного уравнения *общей* математической модели построения кинематических линейчатых поверхностей на основе конических преобразований торсовых поверхностей, а именно, в результате решения следующего уравнения [5]:

$$\frac{1}{l} \int_{p_0}^p K_1(p) dp = \int_0^t \frac{1}{R(t)} k_1(t) dt,$$

где  $l$  – длина выделенной образующей конуса  $OM$ ;

$$p_0 = p(t = 0);$$

$$K_1 = \sqrt{(X'_1)^2 + (Y'_1)^2 + (Z'_1)^2};$$

$R$  – радиус кривизны ребра возврата торса – кривой  $f$ ;

$$k_1 = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}.$$

Таким образом, для каждого значения параметра  $t$ , во-первых, определяются координаты точки  $O$  (вершины конуса) в системе  $oxuz$  и, во-вторых, рассчитывается соответствующее значение параметра  $p$ , по которому определяются координаты точки  $M$  сначала в системе  $OXYZ$ , а затем в системе  $oxuz$ , что позволяет описывать положение выделенной образующей конуса ( $OM$ ) в процессе качения конуса по торсу, т.е. описывать кинематическую линейчатую поверхность.

## 5. КОМПЬЮТЕРНО-ГРАФИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА (VISUAL BASIC 6.0) ПОСТРОЕНИЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ НА ОСНОВЕ КОНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТОРСОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ.

В компьютерной программе построения кинематических линейчатых поверхностей на основе конических преобразований торсовых поверхностей реализованы численные методы дифференцирования и интегрирования, что позволяет включать в компьютерно-графическое моделирование кинематических поверхностей новые классы исходных кривых, задающих как торсовую, так и коническую поверхности.

Разработанная компьютерная программа обеспечивает визуализацию полученных кинематических линейчатых поверхностей, предоставляет широкий набор элементов управления, вынесенных на экран дисплея, позволяющих с помощью компьютерной “мыши” изменять параметры исходных кривых и поверхностей (угол при вершине конуса  $\beta$ , длина выделенной образующей конуса  $l$ , параметры  $a$  и  $b$  для эллиптического конуса и эллиптической винтовой линии, шаг  $h$  и число витков  $n$  для винтовой линии, используемой в качестве ребра возврата торса), а также частоту линий, изображающих линейчатые поверхности, линейные размеры и размещение на экране результирующих кинематических линейчатых поверхностей.

Реализованная в данной программе концепция трехмерных представлений позволяет с помощью манипулятора “мышь” выполнять всевозможные вращения графических объектов, в частности, полученных кинематических поверхностей с целью визуального анализа и оценки их технико-эстетических характеристик.

В программе предусмотрена также возможность вывода с экрана на печать полученных кинематических линейчатых поверхностей.

В качестве примера на рисунках 4–7 приведены некоторые из построенных кинематических линейчатых поверхностей для случаев качения прямого кругового (рис. 4) и прямого эллиптического (рис. 5) конуса по торсу с ребром возврата в виде цилиндрической (эллиптической) винтовой линии (рис. 4, 5), а также для случаев качения прямого кругового (рис. 6) и прямого эллиптического (рис. 7) конуса по торсу с ребром возврата в виде конической винтовой линии (рис. 6, 7).

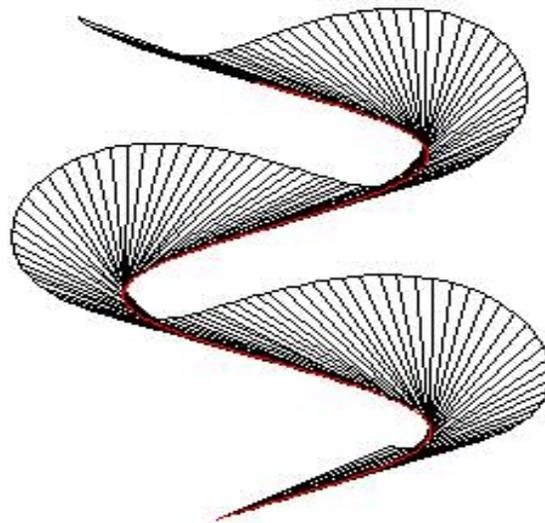


Рис. 4.

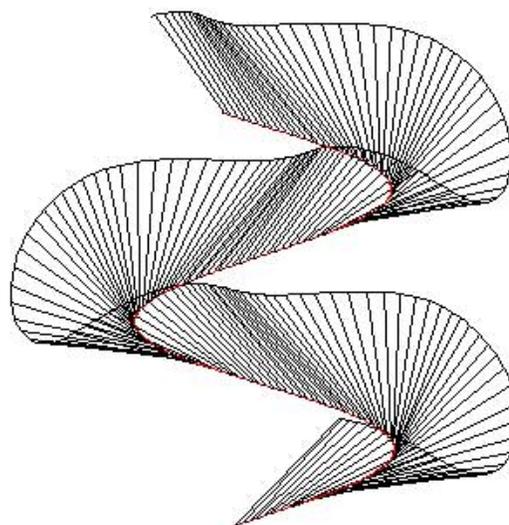


Рис. 5.

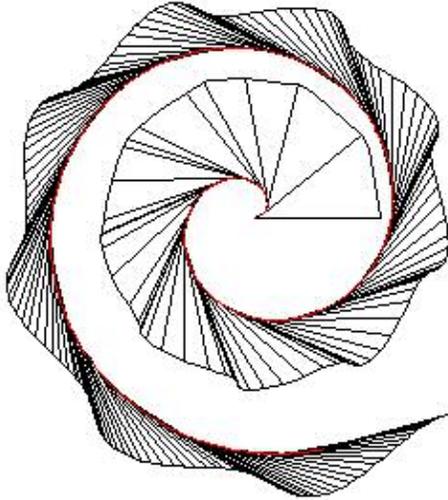


Рис. 6.

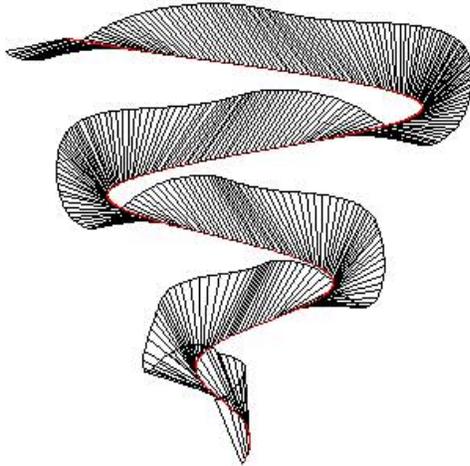


Рис. 7.

## 6. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Рачковская Г.С. Неклассические модели качения линейчатых поверхностей (конус и развертка торса). ГРАФИКОН' 2001. Н.Новгород. С. 153-156.
- [2] Рачковская Г.С. Моделирование качения конуса по развертке торса и разложение ротативно-спироидального преобразования пространства. Известия Ростовского государственного строительного университета. 2001. Ростов-на-Дону. С. 54-59.
- [3] Рачковская Г.С., Харабаев Ю.Н. Аналитическое описание и компьютерная модель кинематики линейчатых поверхностей на основе конических преобразований торсовых поверхностей. Научно-технический сборник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». 2002. Київ. Випуск 71. С. 242-246.
- [4] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. 1968. Москва. 720 с.
- [5] Rachkovskaya G.S., Kharabayev Yu.N. Mathematical modelling of kinematics of ruled surfaces based on conical transformations of torses. Proceedings of The 10<sup>th</sup> International Conference on Geometry and Graphics. 2002. Kyiv. Ukraine. Vol.1. P.283-286.

## 7. АВТОРЫ

### **Рачковская Галина Станиславовна**

Кандидат технических наук,  
старший научный сотрудник  
Ростовского государственного университета.

Адрес:

Россия, 344007, Ростов-на-Дону,

Пушкинская ул., 107, кв. 25.

Телефон: 8(863-2)44-12-37.

E-mail: cons@aaanet.ru

### **Харабаев Юрий Николаевич**

Главный специалист «ПроектНИИстройдормаша»  
по проблемам автоматизации проектных работ и  
управления производственной деятельности.

Адрес:

Россия, 344008, Ростов-на-Дону,

Буденновский пр., 1-«Б», кв. 46.

Телефон: 8(863-2)62-23-45.