

Алгоритм нелокального среднего на основе разложения по функциям Эрмита в задачах компьютерной томографии

Н. В. Мамаев¹, А. С. Лукин², Д. В. Юрин³, М. А. Глазкова⁴, В. Е. Синицин⁵,
Лаборатория математических методов обработки изображений⁶,
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Россия
ФГУ «Лечебно-реабилитационный центр» Минздравсоцразвития РФ⁷

¹mamaev.nikolay93@mail.ru, ²lugin@ixbt.com, ³yurin@cs.msu.su, ⁴mary-ga@yandex.ru, ⁵vsini@mail.ru,
⁶<http://imaging.cs.msu.su>, ⁷<http://www.med-rf.ru/stuff/g/>

Аннотация

Предлагается алгоритм подавления шума (HeNLM), представляющий собой модификацию метода локальных струй (LJNLM-LR). Суть модификация заключается в разложении локальных окрестностей пикселя по функциям Эрмита, которые образуют ортонормированную базис, вместо производных функции Гаусса. Тестирование алгоритма на изображениях компьютерной томографии в сравнении с методом локальных струй и алгоритмом нелокального среднего показало лучшее сохранение высокодетальных областей, четких границ, и отсутствие потерь важной медицинской информации.

Ключевые слова: компьютерная томография, фильтрация шума, алгоритм нелокального усреднения, метод локальных струй, функции Эрмита.

1. ВВЕДЕНИЕ

Компьютерная томография (КТ) – метод расчетного восстановления с помощью преобразования Радона изображений срезов объекта по набору рентгеновских снимков, просвечивающих объект в разных направлениях [7]. В получающихся изображениях всегда присутствует шум, уровень которого тем выше, чем ниже мощность излучения. Поэтому эффективное удаление шума в результатах медицинских обследований с помощью КТ позволяет уменьшить дозу облучения пациентов и является актуальной задачей [3,9]. Шум на изображениях КТ близок к Гауссову [4,8].

В последнее время одними из наиболее эффективных методов удаления шума являются алгоритмы, в которых веса пикселей зависят от схожести некоторых величин, характеризующих окрестности пикселей [2], [6], [10]. Первый алгоритм, известный как алгоритм нелокального усреднения (NLM), вычисляет веса в зависимости от евклидова расстояния между блоками вокруг пикселей. Алгоритмы [6] и [10] являются модификациями [2] и позволяют снизить вычислительную сложность за счет замены евклидова расстояния между блоками на расстояние между векторами признаков. Размерность таких векторов, как правило, значительно ниже, чем количество пикселей в блоке. Алгоритм GFNLM [10] основан на признаках, полученных путем разложения окрестности пикселя по функциям Габора. Алгоритмы LJNLM-LR и LJNLM-UR [6] основаны на разложении окрестности пикселя в ряд Тейлора, коэффициенты которого определяются производными функции Гаусса (Local Jets). Достоинством [6] является поиск похожих блоков не только относительно плоско-параллельного сдвига, но и относительно вращения.

В настоящей статье предлагается метод нелокальной фильтрации, основанный на разложении блока пикселей по функциям Эрмита (HeNLM). Наследуя все достоинства подхода [6], метод HeNLM лучше различает текстуры за счет большей независимости компонент вектора-параметра, обусловленной ортонормированностью функций Эрмита и лучшего описания ими высокочастотных компонент локальной окрестности.

2. МЕТОД ЛОКАЛЬНЫХ СТРУЙ ДЛЯ АЛГОРИТМА НЕЛОКАЛЬНОГО УСРЕДНЕНИЯ

В алгоритме NLM значение выходного пикселя $f(x, y)$ является взвешенной суммой значений исходного изображения $I(x, y)$ по некоторой окрестности Q :

$$f(x, y) = \frac{1}{\sum_{(\xi, \eta) \in Q} w} \sum_{(\xi, \eta) \in Q} w(x, y, \xi, \eta) I(x + \xi, y + \eta) \quad (1)$$

здесь веса $w(x, y, \xi, \eta)$ зависят от схожести целых блоков $v(x, y)$ вокруг пикселя с координатами (x, y) :

$$w(x, y, \xi, \eta) = \exp\left(-\frac{\|v(x, y) - v(x + \xi, y + \eta)\|_2^2}{2\rho^2}\right) \quad (2)$$

Этот метод обеспечивает высокое качество получаемого изображения, но имеет высокую вычислительную сложность. Кроме того, метод [2] не учитывает поворот блоков пикселей, т.е. пиксели, лежащие на одной границе, но с разным направлением градиента, будут считаться различными и иметь малые веса (1). Это может привести к плохому подавлению шума вдоль границ, где градиент в каждой точке границы имеет разные направления. Так как вычисление весов (2) происходит путем сравнения необработанных значений пикселей, алгоритм NLM сильно чувствителен к шуму.

Метод локальных струй (алгоритмы LJNLM-LR и LJNLM-UR [6]) частично преодолевает недостатки [2]. В LJNLM выходной пиксель также представлен как взвешенная сумма пикселей исходного изображения, но веса зависят от расстояния между векторами признаков, характеризующими некоторую окрестность пикселя. Компонентами вектора признаков в LJNLM являются значения сверток изображения $I(x, y)$ с производными функции Гаусса на различных масштабах:

$$f_{nm}^{\sigma}(x, y) = I(x, y) * \left(\frac{\sigma^{n+m}}{1+n+m} \frac{d^{n+m} G_{\sigma}}{dx^n dy^m} \right), \quad (3)$$

где функция Гаусса задается выражением:

$$G_{\sigma}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-(x^2+y^2)/2\sigma^2}, \quad (4)$$

а множитель σ^{n+m} вводится в (3) для того, чтобы отклик фильтра на одинаковые текстуры на разных масштабах был одинаков [11]. Иными словами, если одновременно увеличить σ и во столько же раз растянуть функцию $I(x, y)$, то значения (3) не должны изменяться. Знаменатель $1+n+m$ отражает количество разных производных порядка $n+m$.

Для обеспечения инвариантности к повороту полученных признаков они переводятся в систему координат (ξ, η) , где ось ξ направлена вдоль градиента в точке (x, y) .

В итоге вектор, характеризующий окрестность пикселя выглядит следующим образом:

$$P = \left\{ \tilde{f}_{nm}^{\sigma}; n+m \leq r, \sigma \in S \right\} \quad (5)$$

где \tilde{f}_{nm}^{σ} – признак в системе координат (g, τ) , r – максимальный порядок производной, S – множество масштабов.

3. ФУНКЦИИ ЭРМИТА

Функции Эрмита определены следующим образом:

$$\psi_n(x) = \frac{1}{c_n} e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n (e^{-x^2})}{dx^n} = \frac{(-1)^n}{c_n} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}},$$

$$\text{где } c_n = \sqrt{\sqrt{\pi} 2^n n!} \quad (6)$$

$$H_n(x) = (-1)^n \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} e^{x^2} \text{ – полином Эрмита.}$$

Они образуют полную ортонормированную систему в $L_2(-\infty, +\infty)$ [1, ф.22.11.8,1, ф.22.1.1,22.1.2.,22.2.14]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \delta_{nm} \quad (7)$$

Многомасштабные функции Эрмита определим как:

$$\psi_n^{\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma} \psi_n\left(\frac{x}{\sigma}\right) \quad (8)$$

Множитель $1/\sigma$ в (8) приводит к тому, что $\psi_n^{\sigma}(x)$, в отличие от (7), оказываются нормированными не на единицу, но обеспечивают более важную нормировку по отклику на текстуры – см. комментарий после формулы (4). Они удовлетворяют дифференциальному уравнению [1, ф.22.6.20]:

$$\psi_n^{\sigma''}(x) + (\sigma^2(2n+1) - x^2)\psi_n^{\sigma}(x) = 0 \quad (9)$$

Некоторые функции Эрмита и производные функции Гаусса представлены на Рис. 1. Видно, что интервалы локализации функций Эрмита и производных функции Гаусса примерно совпадают, однако функции Эрмита позволяют значительно лучше представлять края интервала и не имеют сильного разброса амплитуд. Из уравнения (9) можно получить область локализации функции Эрмита. Действительно, $\psi_n^{\sigma''} = 0$ в точках $x = \pm\sigma\sqrt{2n+1}$, что соответствует последним точкам перегиба функции Эрмита. Область локализации функций Эрмита в основном сосредоточена между крайними перегибами, поэтому носитель функции Эрмита находится между точками $x = \pm\sigma\sqrt{2n+1}$. Это выражение позволяет оценить размер окрестности пикселя, по которой происходит разложение по функциям Эрмита, и минимальный размер ядра свертки при численных расчетах.

Двумерные функции Эрмита будем определять [5] как:

$$\psi_{nm}^{\sigma}(x, y) = \psi_n^{\sigma}(x)\psi_m^{\sigma}(y) \quad (10)$$

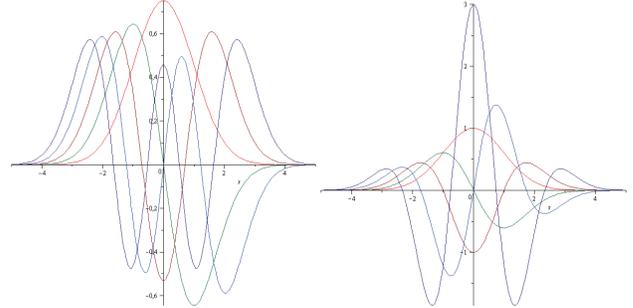


Рис. 1: Функции Эрмита (слева) и производные функции Гаусса (справа).

4. АЛГОРИТМ НЕЛОКАЛЬНОГО УСРЕДНЕНИЯ НА ОСНОВЕ ФУНКЦИЙ ЭРМИТА

Мы предлагаем модификацию метода локальных струй [6] с использованием разложения по функциям Эрмита вместо производных функции Гаусса. Элементами вектора признаков теперь являются свертки исходного изображения u с соответствующими функциями Эрмита:

$$h_{nm}^{\sigma} = u * \psi_{nm}^{\sigma} \quad (11)$$

Так же как и в методе локальных струй, признаки переводятся в систему координат (ξ, η) . Получим явное выражение. Рассмотрим две системы координат, связанные поворотом:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \text{ где } R = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (12)$$

Тогда оператор дифференцирования в новых координатах можно выразить через линейную комбинацию операторов в старой системе координат:

$$\frac{d}{d\xi_i} = \sum_{j=1,2} R_{ij} \frac{d}{dx_j}, \text{ где } i=1,2; \xi_1 = \xi; \xi_2 = \eta; j=1,2; x_1 = x; x_2 = y. \quad (13)$$

При этом выражение для производной функции Гаусса из (6) примет вид:

$$\frac{d^{n+m}G_\sigma}{d\xi_1^n d\xi_2^m} = \left(\sum_{j=1,2} R_{1j} \frac{d}{dx_j} \right)^n \left(\sum_{j=1,2} R_{2j} \frac{d}{dx_j} \right)^m G_\sigma \quad (14)$$

Функция Эрмита представляет собой произведение производной функции Гаусса, множителя $e^{(x^2+y^2)/2}$ и нормировочной константы C_i . Тогда подставляя (12) в (14), учитывая радиальную симметрию экспоненты и линейность операции свертки (11), нетрудно получить:

$$c_n c_m \tilde{h}_{nm}^\sigma = \sum_{j=0}^{n+m} a_j c_j c_{n+m-j} h_{j,n+m-j}^\sigma, \quad \text{где} \quad (15)$$

$$a_j = \sum_{k=\max(0, j-m)}^{\min(j, n)} (-1)^{j-k} (\cos \vartheta)^{m-j+2k} (\sin \vartheta)^{n+j-2k} C_n^k C_m^{j-k}$$

$$\text{и } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Заметим, что (15) могут быть применены и для метода локальных струй (3),(5). Для этого в (15) надо заменить h_{nm}^σ на f_{nm}^σ , а константы C_i положить равными 1.

Так как новый базис ξ, η выбран так, чтобы ось ξ совпала с вектором градиента яркости изображения $\vec{g} = (I(x, y) * dG_\sigma/dx, I(x, y) * dG_\sigma/dy)^T$, получим, что в (12) и (15) $\vec{g}/|\vec{g}| = (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^T$.

Использование функций Эрмита вместо производных функций Гаусса представляется лучшим для характеристики окрестности пикселя в силу их ортонормированности, что означает меньшую взаимозависимость компонент h_{nm}^σ (11) и, соответственно, их большую значимость. Также происходит расширение области локализации (Рис. 1), и, следовательно, лучше учитываются периферийные данные локальной окрестности и высокочастотные компоненты.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ

Исходные, изображения компьютерной томографии (КТ) были предоставлены ФГБУ «Лечебно-реабилитационный центр» Минздрава России и выполнялась на 64-спиральном компьютерном томографе Discovery CT 750 MD (General Electric). На Рис. 2. показан один из срезов КТ, а на Рис. 3. показаны увеличенные фрагменты изображений из рамки на рис. 2, отфильтрованных различными методами.

Для алгоритма нелокального усреднения размер области усреднения был выбран 21x21, размер блока пикселей – 7x7. Для остальных алгоритмов фильтрации область усреднения – 21x21, максимальный порядок производных Гаусса (Local Jets [6]) и функций Эрмита равен 4, значения σ для функции Гаусса равны 1.0 и 4.0. Таким образом, размерность вектора признаков для методов LJNLM-LR и HeNLM равна 20. Пара-

метр фильтрации ρ выбран вручную так, чтобы PSNR между зашумленным и отфильтрованным изображением во всех случаях был одинаков.



Рис. 2: Исходное изображение компьютерной томографии. Белой рамкой обозначен увеличенный фрагмент изображения, показанный на рис. 3.

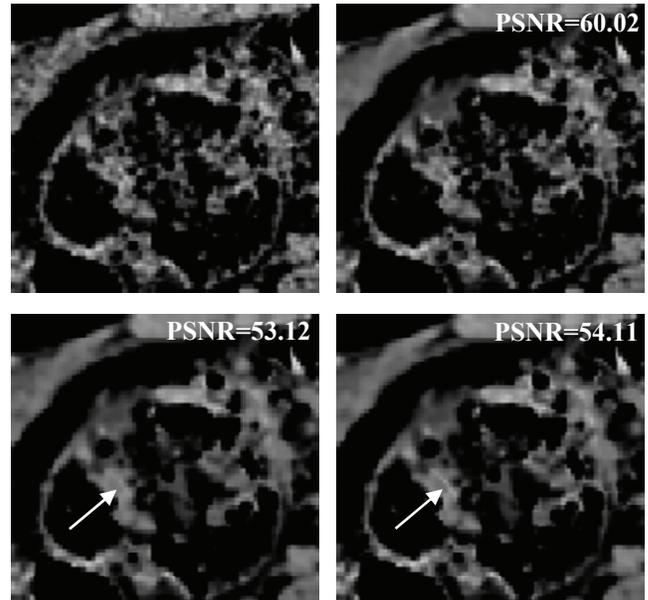


Рис. 3: Слева направо и сверху вниз: увеличенный фрагмент исходного изображения, и результаты работы алгоритмов фильтрации: нелокального усреднения (NLM), локальных струй (LjNLM-LR) и предложенного алгоритма (HeNLM).

На Рис. 3 видно, что метод локальных струй и предложенный нами метод осуществляют фильтрацию лучше, чем алгоритм нелокального усреднения, в местах, где присутствует большое количество мелких деталей. Предложенный метод при фильтрации сохраняет некоторые детали, которые метод локальных струй размывает: на Рис. 3 стрелкой показана линия, которая при фильтрации методом LjNLM-LR размывается, но остается при фильтрации предложенным методом HeNLM.

На Рис. 4 показано сравнение PSNR для метода LjNLM-LR и предложенного метода. Белый цвет отображает места, где PSNR выше у предложенного метода, черный – у метода локальных струй. Видно, что предложенный метод удаляет шум сильнее в высоко детализированных областях, а метод локальных струй – в однородных областях.

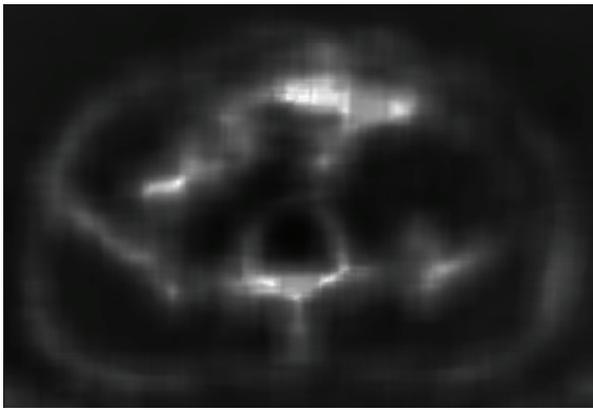


Рис. 4: «Маска» PSNR для предложенного метода и метода локальных струй.

Качество изображений, отфильтрованных различными методами, было оценено двумя врачами-рентгенологами и сопоставлено с исходными данными. Анализ включал в себя измерение уровня шума, локального отношения сигнал-шум (SNR) и субъективную оценку специалистом (визуализация мелких деталей). Для измерения уровня сигнала и шума при исследовании органов брюшной полости была выбрана зона интереса (ROI) 150 мм² в пяти различных точках (Рис.5): на уровне брюшной аорты, паренхимы печени, селезенки, поджелудочной железы, почек. Средние значения шума и SNR представлены как медиана (межквартильный размах). Для расчета статистически значимых различий между исходными изображениями и результатами работы алгоритмов фильтрации использовали тест Фридмана.



Рис. 5: Измерение уровня сигнала и шума на следующих уровнях: (1) печень; (2) аорта; (3) селезенка. ROI=150 мм².

Полученные данные показали, что благодаря применению различных алгоритмов фильтрации, можно улучшить качество полученных изображений. Так, при сравнении исходных и отфильтрованных изображений было отмечено достоверное снижение уровня шума и повышения SNR ($p < 0,05$) в результате работы алгоритмов фильтрации. При этом статистически значимых различий между уровнем шума и SNR при работе трех разных алгоритмов фильтрации: нелокального усреднения, метода локальных струй и предложенного метода получено не было ($p = 0,6$ и $0,55$ соответственно). См. Таб. 1; Рис.6.

Необходимо также отметить, что визуализация мелких деталей была сопоставима с исходными данными.

Таблица 1

Параметр	Исходные изображения	HeNLM	LJNLM-LR	NLM	P
Уровень шума	20,6 [18,5-21,3]	4,6 [3,5-5,6]	5,4 [3,6-6,4]	2,7 [2-4,3]	0,005
SNR	2,1 [1,9-3,4]	10,2 [7,5-13]	6,8 [6-16,5]	14,4 [8-31]	0,003



Рис. 6: Представлены значения плотности и шума паренхимы левой почки, выбранная область интереса составила 150 мм². Слева направо и сверху вниз: исходное изображение, и результаты работы алгоритмов фильтрации: HeNLM, LJNLM-LR, NLM. Отмечается значительное снижение уровня шума при использовании предложенных алгоритмов фильтрации.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложен метод фильтрации изображений компьютерной томографии на основе функций Эрмита. Использование этого метода позволит улучшить качество полученных в ходе исследования изображений, благодаря снижению уровня шума и повышению соотношения сигнал-шум, без потери диагностической информации.

7. БЛАГОДАРНОСТИ

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 13-07-00584.

8. ЛИТЕРАТУРА

- [1] M. Abramowitz, I.A. Stegun. "Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables" // U.S. National Bureau of Standards (1964); Dover, New York 1965.
- [2] A. Buades. "A non-local algorithm for image denoising" // IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 2005, -V. 2, -P. 60–65.

- [3] M.K. Kalra, C. Wittram, M.M. Maher, A. Sharma, G.B. Avinash, K. Karau, T.L. Toth, E. Halpern, S. Saini, J.A. Shepard. "Can noise reduction filters improve low-radiation-dose chest CT images? Pilot study." // *Radiology* 2003; -V. 228, -P. 257–264.
- [4] M.F. Kijewski, P.F. Judy. "The noise power spectrum of CT images" // *Phys. Med. Biol.*, 1987, -V. 32, -No 5, -P. 565–575. Printed in the UK
- [5] A.S. Krylov, A.V. Kutovoi, Wee Kheng Leow. "Texture Parameterization With Hermite Functions" // *Proc. Of The 12th International Conference Graphicon'2002*. Russia, Nizhny Novgorod, 2002, -P. 190–194.
- [6] A. Manzanera. "Local Jet based similarity for NL-Means filtering" // *20th International Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (ICPR)*, 2010, -P. 2668–2671.
- [7] F. Natterer. "The Mathematics of Computerized Tomography" // *SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia, PA, USA, July 2001, 222 p.
- [8] T.H. Newton, D.G. Potts. "Radiology of the Skull and Brain. Vol. 5. Technical aspects of computed tomography" // *C. V. Mosby Co*, St. Louis, 1981 585 p., ISBN 0-8016-3662-0.
- [9] M.V. Storozhilova, A.S. Lukin, D.V. Yurin, V.E. Sinitsyn. "Two approaches for noise filtering in 3D medical CT-images" // *Proc. Of The 22-th Int. Conf. on Computer Graphics GraphiCon'2012*. Moscow, Russia, 2012, -P. 68–72.
- [10] S. Wang, Y. Xia, Q. Liu, J. Luo, Y. Zhu, D. Feng. "Gabor feature based nonlocal means filter for textured image denoising" // *Journal of Visual Communication and Image Representation*, -V. 23, Issue 7, Oct. 2012, -P.1008–1018.
- [11] T. Lindeberg. "Scale-Space Theory in Computer Vision" // *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 1994

Об авторах



Мамаев Николай Владимирович, студент кафедры математической физики, факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Nikolay V. Mamaev is a student at Chair of Mathematical Physics in Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Russia.

His e-mail is: mamaev.nikolay93@mail.ru



Лукин Алексей Сергеевич, к.ф.-м.н., сотрудник лаборатории математических методов обработки изображений факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Alexey S. Lukin (Ph.D.) is a member of scientific staff at the Laboratory of Mathematical Methods of Image Processing in Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Russia.

His e-mail is: lukin@ixbt.com



Юрин Дмитрий Владимирович, к.ф.-м.н., с.н.с. лаборатории математических методов обработки изображений, факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Dmitry V. Yurin (Ph.D.) is a senior researcher at laboratory of Mathematical Methods of Image Processing in Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Russia.

His e-mail is: yurin_d@inbox.ru, yurin@cs.msu.su



Глазкова Мария Александровна, ординатор кафедры лучевой диагностики Российской медицинской академии последипломного образования (РМАПО).

Maria A. Glazkova is an attending physician at Chair of X-Ray diagnostics of Russian Medical Academy of Postgraduate Education (RMAPO).

Her e-mail is: mary-ga@yandex.ru.



Синицын Валентин Евгеньевич, проф., д.м.н. Руководитель центра лучевой диагностики ФГУ «Лечебно-реабилитационный центр» Минздравсоцразвития РФ. Руководитель курса лучевой диагностики и лучевой терапии Факультета фундаментальной медицины МГУ им. М.В.Ломоносова, проф. кафедры лучевой диагностики РМАПО.

Valentin E. Sinitsyn (MD) is a Head of Radiology, Federal Center of Medicine and Rehabilitation, Moscow.

His e-mail is: vsini@mail.ru

A Non-Local Means Algorithm Using Hermite Functions Expansion for CT applications

Abstract

We propose a new algorithm for noise suppression – HeNLM. It is a modification of an existing local jets based method LJNLM-LR. The neighborhood of a pixel is expanded in a series of Hermite functions, which, unlike Gaussian derivatives, form an orthonormal basis. Testing of our method against Local Jets and NLM has shown better preservation of detail-rich areas, sharp edges in CT scans, without loss of medically-important information.

Keywords: *computed tomography, noise filtering, non-local means, local jet, Hermite functions.*